This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

PRÉCIS ÉLÉMENTAIRE

DE LA THÉORIE

DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

AVEC

TABLES NUMÉRIQUES ET APPLICATIONS,

PAR

LUCIEN LÉVY,

EXAMINATEUR D'ADMISSION ET RÉPÉTITEUR D'ANALYSE À L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1898

PRÉCIS ÉLÉMENTAIRE

DE LA THÉORIE

DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

AVEC

TABLES NUMÉRIQUES ET APPLICATIONS.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
24762 Quai des Grands-Augustins, 55.

PRÉCIS ÉLÉMENTAIRE

DE LA THÉORIE

DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

AVEC

TABLES NUMÉRIQUES ET APPLICATIONS,

PAR

LUCIEN LÉVY,

EXAMINATEUR D'ADMISSION ET RÉPÉTITEUR D'ANALYSE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1898

(Tous droits réservés.)

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
96412
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS.
1898.

PRÉFACE.

Le *Précis* que je publie aujourd'hui m'a souvent été demandé par des ingénieurs désireux de voir les fonctions elliptiques dégagées des hautes théories du Calcul intégral et conduites jusqu'aux applications numériques. C'est à eux surtout que ce Livre s'adresse. J'ai dû cependant songer aussi aux étudiants et, tout en leur faisant connaître les propriétés les plus essentielles des fonctions elliptiques, les mettre à même de lire et de comprendre les Ouvrages plus étendus, tels que le *Traité* d'Halphen ou les *Éléments* de MM. Tannery et Molk.

Le but que j'avais en vue m'imposait une double nécessité. D'abord, au point de vue des applications à l'Art de l'Ingénieur, le réel seul compte; les valeurs imaginaires des fonctions sont sans intérêt, je les ai passées sous silence autant que faire se pouvait; si les démonstrations y ont perdu comme généralité, elles y ont souvent gagné comme simplicité. Ensuite les méthodes devaient être courantes; donc pas d'intégration le long de contours imaginaires, pas de théories sur les fonctions doublement périodiques en général. Les notions, qui me servent de point de départ, sont familières aux élèves de Mathématiques spéciales ou tout au moins à ceux de nos Écoles d'Ingénieurs, Centrale, des Ponts et Chaussées ou des Mines; ce sont les propriétés des séries con-

vergentes et la notion de l'intégrale définie réelle. Sur les séries, j'ai admis qu'elles pouvaient être traitées comme des polynomes, additionnées, multipliées, dérivées, etc. J'ai aussi admis une ou deux fois des théorèmes qui ne sont démontrés que dans un Chapitre complémentaire ou dans un texte en petits caractères. J'espère que cette liberté me sera accordée au même titre qu'on admet dans les lycées l'existence d'une racine réelle ou imaginaire pour toute équation algébrique à une inconnue, ou encore l'existence de la fonction implicite, définie par une équation entre deux variables.

Avec ce point de départ, j'ai pu aborder les problèmes les plus variés ([1]) auxquels s'appliquent les fonctions elliptiques et montrer ainsi que ce sont leurs propriétés les plus élémentaires qui sont les plus utiles. Il y avait donc intérêt à détacher ces propriétés et à les placer au seuil de l'enseignement supérieur au lieu de les reléguer à la fin, de même qu'en Trigonométrie on n'attend pas d'être en possession des éléments du Calcul intégral pour étudier le sinus et le cosinus. L'inconvénient du plan adopté est que j'ai dû, une ou deux fois, pour rester sur un terrain élémentaire, allonger les démonstrations; mais cet inconvénient disparaît pour le lecteur qui peut se dispenser de refaire les calculs un peu laborieux et s'en tenir aux résultats et au texte toujours facile à comprendre. Un second inconvénient est que des formules établies pour le domaine réel ne peuvent pas toujours sans danger être étendues au domaine imaginaire. Le Chapitre IX où j'indique les méthodes générales obvie à cet inconvénient.

([1]) J'ai choisi de préférence ceux que j'ai eu l'occasion de traiter dans mes conférences à l'École Polytechnique.

Un *Précis* ne peut naturellement pas prétendre à être complet; j'ai au moins saisi toutes les occasions d'indiquer les belles questions qui se présentent dans l'étude des fonctions elliptiques, équation de Lamé, transformation, etc. Les exercices m'ont également permis soit de donner un grand nombre de formules, faciles à établir, et qui complètent celles du texte, soit de renseigner le lecteur sur quelques applications abordables avec les ressources du *Précis* et que j'ai dû laisser de côté pour ne pas trop allonger; l'Ouvrage de M. Greenhill, traduit par M. Griess, m'a été, à ce point de vue, d'une grande utilité.

On remarquera le rôle prépondérant que jouent, dans mon Livre, les fonctions de Weierstrass; c'est conforme aux traditions qui s'établissent non seulement dans l'enseignement, en France, mais encore dans un certain nombre de chaires étrangères ([1]). J'ai cependant fait leur part aux fonctions de Jacobi que tant d'illustres savants, et en premier lieu M. Hermite, ont adoptées, et je les ai utilisées partout où elles se sont présentées naturellement. Le Tableau que j'ai placé à la fin du Volume permettra de se retrouver aisément dans les diverses notations; celles que j'ai adoptées sont celles qui sont enseignées à l'École Polytechnique; je ferai seulement observer que $2\omega_1$ désigne toujours la période réelle et $2\omega_2$ la période imaginaire, même quand ces deux périodes ne forment pas un couple de périodes primitives. Il m'a semblé préférable, dans un Ouvrage où j'étais surtout préoccupé des applications, de conserver toujours le même nom aux seules périodes utiles pour les applications.

([1]) *Voir* notamment, en France, les deux *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique;* les *Éléments*, de MM. Tannery, directeur des études à l'École Normale, et Molk, professeur à la Faculté de Nancy; à l'étranger, le *Cours* de M. Teixeira, le savant directeur de l'Académie polytechnique de Porto, etc.

Les Tables numériques constituent une innovation dans un Ouvrage élémentaire; on verra, par l'exemple détaillé que j'ai traité pages 153 à 159, qu'elles donnent une approximation généralement bien suffisante.

Le soin avec lequel ce petit Volume a été imprimé est dans les habitudes de MM. Gauthier-Villars; je tiens à les en remercier ici ainsi que de l'amabilité avec laquelle ils m'ont engagé à achever un Ouvrage trop souvent interrompu.

TABLE ANALYTIQUE DES MATIÈRES.

Pages

PRÉFACE V

ERRATA XII

CHAPITRE I.

Notions préliminaires 1

Représentation des quantités imaginaires. — Points critiques, fonctions holomorphes, méromorphes, uniformes.

CHAPITRE II.

Des séries [formules (1) à (19)] 7

Étude préliminaire d'une fonction holomorphe, périodique de troisième espèce. — La fonction θ : périodes, zéros; équation à trois termes. — Les fonctions θ_1, θ_2, θ_3 : développements en séries d'exponentielles ou de lignes trigonométriques changement de signe de l'argument, addition des périodes et des demi-périodes, zéros, relations quadratiques, développements en produits. — Exercices.

CHAPITRE III.

Fonctions σu, $\sigma_\alpha u$, ζu [formules (20) à (40)] 28

Définitions : parité, zéros, développement suivant les puissances de u; η_1, η_2, η_3; addition des périodes et des demi-périodes. — Équation à trois termes : formules d'addition. — ζu : addition des périodes, parité, formule d'addition. — Exercices.

CHAPITRE IV.

Des fonctions elliptiques [formules (41) à (69)] 39

Premier point de vue : pu, double périodicité, parité, racines de la dérivée, introduction de pu dans les formules du Chapitre précédent. — Deuxième point de vue : $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$; parité, périodicité, zéros,

Pages

pôles, relations fondamentales. — Première formule d'addition de pu; équation différentielle de pu. — Les puissances de pu en fonction linéaire de pu et de ses dérivées. — Deuxième formule d'addition de pu. $\sqrt{pu - e_\alpha}$ est uniforme. — Expression de e_α en fonction des θ. — Rapprochement entre les différentes constantes. — Relation entre pu et $\operatorname{sn} u$. — Équations différentielles de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$. — Variation de pu (valeurs réelles); formule d'homogénéité. — Variation de $\operatorname{sn} u$. — Exercices.

CHAPITRE V.

Intégration par les formules elliptiques [formules (70) à (73)] 73

Intégration des fonctions qui sont rationnelles par rapport aux fonctions elliptiques. — Inversion. — Intégrales complètes de Legendre. — Exercices.

CHAPITRE VI.

Calculs numériques : usage des Tables 86

Calcul de ω_1, ω_2, η_1, η_2 dans les deux cas du discriminant positif et du discriminant négatif. — Connaisssant u et k, calculer $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, pu, $p'u$, ζu et problème inverse. — Exercices.

CHAPITRE VII.

Applications 106

Applications mécaniques : Pendule simple; élastique plane; mouvement d'un projectile dans un milieu où la résistance est proportionnelle au cube de la vitesse; moyen de former une Table des valeurs de pu lorsque $g_2 = 0$, intégrales pseudo-elliptiques; pendule sphérique, équation de Lamé.

Applications géométriques : Arc d'ellipse, théorème de Fagnano; aire de l'ellipsoïde, expression au moyen des fonctions de Weierstrass, comparaison avec la formule de Legendre.

Application algébrique : Résolution de l'équation du quatrième degré; exemple numérique. — Exercices.

CHAPITRE VIII.

Deuxième méthode de calcul : emploi des séries θ..... 163

Les constantes K, K', q, ω_1, ω_2, η_1, η_2. Les fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, pu, ζu, σu connaissant u, et problème inverse. — Mêmes problèmes avec le discriminant négatif. — Exercices.

CHAPITRE IX.

Pages

Compléments : décomposition en facteurs et en éléments simples; multiplication de l'argument; addition de sn u 182

Rappel des théorèmes relatifs à l'intégration le long de contours imaginaires. — Application aux fonctions elliptiques; construire une fonction elliptique : 1° connaissant ses pôles et ses zéros; 2° ses pôles et ses parties infinies dans le voisinage de chaque pôle. — Multiplication de l'argument pour pu. — Deuxième démonstration des formules qui donnent $\operatorname{sn}(u+v)$, $\operatorname{cn}(u+v)$, $\operatorname{dn}(u+v)$.

NOTES.

I. — *Réduction de quatre intégrales aux fonctions elliptiques* 195

II. — *Dégénérescences* 197

III. — *Inversion en quantités réelles par les fonctions de Jacobi* 198

IV. — *Application numérique des fonctions elliptiques au mouvement presque vertical des projectiles* 200

EXERCICES DIVERS 206

QUELQUES VALEURS DES FONCTIONS DE JACOBI 212

RÉSUMÉ DES PRINCIPALES FORMULES 213

COMPARAISON DES NOTATIONS DU *Précis* AVEC CELLES DE QUELQUES OUVRAGES. 222

TABLES NUMÉRIQUES 225

ERRATA.

Page 23, ligne 9, *au lieu* de $\theta_4^3(0)$, *lire* $\theta_3^4(0)$.
Page 24, ligne 8 en remontant, le numéro de la formule est (s) et non (1).
Page 24, lignes 1 et 2 en remontant, *au lieu de* $e^{\frac{\pi u}{\omega_1}}$, *lire* $e^{\frac{\pi i u}{\omega_1}}$.
Page 25, ligne 1 » » .
Page 30, ligne 11 en remontant, *après* le mot valeurs *ajouter* réelles.
Page 31, ligne 5, dans l'exposant, *lire* u et *non* n.
Page 46, ligne 12, *au lieu de* $4c_2$, *lire* $20c_2$ et *au lieu de* $-4c_4$, *lire* $28c_4$.
Page 58, dans la formule (γ), *supprimer* les facteurs 2 au second membre.
Page 63, ligne 2, *au lieu de* les *fig.* 2 et 3, *lire* les *fig.* 3 et 4.
Page 64, à gauche de *fig.* 7 *écrire* discriminant négatif; $e_1 < 0$, *au lieu de* discriminant positif; $e_1 > 0$.
Page 90, ligne 3, *après* intégrale, *écrire* complète.
Page 91, ligne 4, *au lieu de* ω_2, *écrire* ω_1.
Page 94, ligne 5, *devant* $\pi - \varphi$, *écrire* sin.
Page 122, ligne 3, en remontant, *au lieu de* $\frac{\partial x}{\partial t}$, *écrire* $\frac{\partial x}{\partial p}$.
Page 128, ligne 5, en remontant, *effacer* le numéro de la formule.
Page 133, dernière ligne, au numérateur de la dernière fraction, *écrire* $x^2 pu$, *a lieu de* α^2.
Page 171, ligne 16, *après* $k^2(1+k^2$, *fermer* la parenthèse.
Page 171, ligne 17, *après* k^2, *ouvrir* la parenthèse.
Page 188, ligne 15, *au lieu de* $(-1)^{\alpha-2}\frac{A_\alpha}{(\alpha-1)!}$, *écrire* $(-1)^{\alpha-1}\frac{A_\alpha}{(\alpha-1)!}$.
Page 196, lignes 15 et 16, *au lieu de* γ, *lire* α.
Page 198, *au lieu de* e, *lire* e_2.

PRÉCIS ÉLÉMENTAIRE

DE LA THÉORIE

DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

AVEC

TABLES NUMÉRIQUES ET APPLICATIONS.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES : VOCABULAIRE, DÉFINITIONS, NOTATIONS.

Représentation des quantités imaginaires. — Il est commode, pour se représenter une quantité imaginaire

$$z = x + y\sqrt{-1} = x + yi,$$

de tracer deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy et de considérer x et y comme les deux coordonnées d'un point M, qu'on nomme l'*affixe* de l'imaginaire; $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ est le *module* de l'imaginaire. x et y peuvent prendre des valeurs arbitraires et indépendantes; dans certains cas, on a besoin de considérer x et y comme fonctions d'un même paramètre t; le point M décrit alors une courbe C; il nous arrivera de dire que le point Z, ou même la variable z, décrit la courbe C.

Chaque variable imaginaire pourra ainsi être considérée comme rapportée à deux axes de coordonnées qui varieront d'une variable à l'autre. Soit $Z = f(z)$ une fonction de z; lorsque z décrira *dans son plan* une courbe, Z décrira *dans son plan* une autre courbe.

Points ordinaires; points critiques. — Si, quel que soit le chemin parcouru par z pour arriver au point z_0, Z prend au point z_0 une valeur unique et finie, le point z_0 sera un *point ordinaire* de la fonction $f(z)$. Dans le cas contraire, ce sera un *point critique;* z_0 sera un *pôle* de $f(z)$ si $f(z_0)$ est infinie et si l'inverse de $f(z)$ reste finie et bien déterminée dans le voisinage de z_0; les points critiques qui ne sont pas des pôles s'appellent des *points singuliers essentiels* (nous n'aurons pas à en considérer). Si $f(z_0)$ est nulle, z_0 est un *zéro* de $f(z)$, *simple, double, triple,* etc., suivant que, dans la suite $f(z_0)$, $f'(z_0)$, $f''(z_0)$, ..., une, deux, trois, ... fonctions sont nulles.

Diverses espèces de fonctions. — Si z_0 est un point ordinaire d'une fonction, la fonction est dite *régulière* au point z_0 et l'on peut développer la fonction suivant la formule de Taylor

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{1.2} f''(z_0) + \ldots.$$

Une fonction régulière en tous les points z d'une portion de plan est dite *holomorphe* dans cette portion de plan. Une fonction qui n'a pas d'autres points critiques que des pôles dans une portion de plan est dite *méromorphe* dans cette portion de plan. Par exemple, les fonctions $\sin z$, $\cos z$, e^z sont holomorphes dans tout le plan, $\operatorname{tang} z$ est méromorphe.

On dit qu'une fonction est *uniforme* (ou *monodrome*) dans une portion de plan lorsqu'elle n'a qu'une valeur pour toutes les valeurs de z situées dans cette portion de plan. Les fonctions précédentes sont uniformes dans tout le plan; $\sqrt{z-a}$, $\log(z-a)$ ne le sont pas. Par exemple $\sqrt{z^2}$ prend, en chaque point du plan, deux valeurs égales et de signes contraires, $\pm z$. Mais si l'on sait d'avance que $\sqrt{z^2}$ doit être positif en même temps que z, $\sqrt{z^2}$ n'aura plus qu'une seule valeur $+z$ bien déterminée pour toutes les valeurs positives de z. Il est donc possible, en ajoutant certaines conditions complémentaires, de traiter les fonctions *mal déterminées* ou *multiformes* comme des fonctions uniformes.

Définitions de fonctions par des séries. — Un des moyens les plus puissants de définir les fonctions d'une variable z consiste

à les définir par des séries. Les fonctions holomorphes sont définies par des séries entières analogues à la série de Taylor; ainsi l'on peut prendre comme définition de e^z, $\sin z$, $\cos z$ les séries suivantes :

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots;$$

et ces séries, convergentes pour toutes les valeurs de z, réelles ou imaginaires, permettent d'établir les formules fondamentales suivantes, dont j'appellerai spécialement la troisième, la quatrième et la cinquième *formules d'Euler :*

$$e^x \times e^y = e^{x+y},$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x,$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

d'où l'on déduit que le module de e^{x+iy} est e^x.

Ces formules sont bien connues : cependant, pour éviter toute difficulté au lecteur, je lui rappellerai que la convergence d'une série imaginaire se constate soit en démontrant que la série des modules de chaque terme est convergente, soit en vérifiant que la partie réelle et la partie imaginaire sont séparément des séries convergentes. Il existe des séries, qui sont convergentes sans que la série des modules soit convergente; telles sont, par exemple, les séries alternées

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots.$$

Nous ne considérerons pas de telles séries, qu'on appelle séries *semi-convergentes*. Les séries, qui seront employées dans cet Ouvrage, seront toujours *absolument convergentes,* c'est-à-dire

que la série des modules des termes sera convergente. On sait que souvent une série

$$A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots,$$

convergente pour des valeurs de z suffisamment voisines de a, cesse de l'être dès que la distance du point z au point a atteint une certaine valeur : cette valeur s'appelle le *rayon de convergence* de la série.

Les fonctions méromorphes s'expriment, ou se définissent, par des *séries de Laurent,* composées d'une série entière analogue à la précédente, précédée d'une fraction rationnelle. Telle sera, par exemple, la fonction pu, qui jouera un rôle prépondérant dans cet Ouvrage,

$$pu = \frac{1}{u^2} + c_1 u^2 + c_2 u^4 + \ldots.$$

La forme générale est, dans le voisinage du pôle a,

$$f(z) = \frac{A_\alpha}{(z-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(z-a)^{\alpha-1}} + \ldots$$
$$+ \frac{A_1}{z-a} + B_0 + B_1(z-a) + B_2(z-a)^2 + \ldots.$$

Fonctions simplement et doublement périodiques. — La Trigonométrie a pour objet l'étude des fonctions périodiques : $\sin z$, $\cos z$ ont pour période 2π, $\operatorname{tang} z$ admet π comme période, e^z a une période imaginaire $2\pi i$. C'est un théorème connu, mais que nous ne démontrerons pas, que les fonctions holomorphes ne peuvent avoir plus d'une période.

Ainsi une fonction qui admet deux périodes distinctes a nécessairement des pôles : les fonctions doublement périodiques les plus simples n'ont pas d'autres points critiques que des pôles : on les appelle *fonctions elliptiques.* On démontre, dans les cours d'Analyse, qu'une fonction méromorphe ne peut avoir plus de deux périodes distinctes et que le rapport de ces périodes doit être imaginaire; nous admettrons ce théorème qui n'offre pas pour nous une utilité immédiate, mais qui fait comprendre pourquoi nous n'introduirons que des fonctions dont les deux périodes présentent un rapport imaginaire.

D'une fonction $f(z)$ simplement périodique, à période 2π, on peut déduire une fonction à période quelconque 2ω, en posant

$$z = \frac{\pi u}{\omega}.$$

La fonction

$$\varphi(u) = f\left(\frac{\pi u}{\omega}\right)$$

admet la période 2ω, puisque, si u augmente de 2ω, z augmente de 2π et par suite $f(z)$ ne change pas, ni $\varphi(u)$. C'est ce qu'on exprime ainsi :

$$\varphi(u + 2\omega) = \varphi(u)$$

et plus généralement, m étant un entier quelconque positif ou négatif,

$$\varphi(u + 2m\omega) = \varphi(u).$$

Fonctions doublement périodiques de deuxième et de troisième espèce. — On appelle *fonction périodique de deuxième espèce* une fonction méromorphe qui est multipliée par deux quantités constantes différentes s_1, s_2, lorsque la variable s'accroît de deux quantités données $2\omega_1$, $2\omega_2$ différentes : on a donc, par définition,

$$\begin{cases} f(z + 2\omega_1) = s_1 f(z), \\ f(z + 2\omega_2) = s_2 f(z). \end{cases}$$

On appelle *fonction périodique de troisième espèce,* une fonction méromorphe qui est multipliée par deux facteurs exponentiels différents, $e^{a_1 z + b_1}$, $e^{a_2 z + b_2}$, lorsque la variable s'accroît respectivement des quantités $2\omega_1$, $2\omega_2$; on a donc par définition

$$\begin{cases} \varphi(z + 2\omega_1) = e^{a_1 z + b_1} \varphi(z), \\ \varphi(z + 2\omega_2) = e^{a_2 z + b_2} \varphi(z). \end{cases}$$

Notations. — Nous désignerons par $|a|$ la valeur absolue ou le module de a ; $f'(u)$, $f''(u)$, ... représenteront les dérivées première, seconde de $f(u)$ par rapport à la quantité désignée par u ; ainsi si

$$\varphi(u) = f(\lambda u),$$

on aura

$$\varphi'(u) = \lambda f'(\lambda u).$$

Nous numéroterons les formules importantes en chiffres arabes, les numéros se continuant d'un Chapitre à l'autre. Les autres formules qu'il pourra être commode de rappeler seront désignées par les lettres de l'alphabet français ou grec, la première lettre étant reprise dans chaque Chapitre.

Les notations adoptées sont celles de l'Ouvrage de M. Jordan (*Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*); ce sont aussi celles employées par M. G. Humbert dans le Cours qu'il professe à l'École Polytechnique. Elles ne diffèrent de celles de MM. Tannery, directeur des Études à l'École Normale, et Molk que par une question peu importante d'indice dans les fonctions θ; celles de M. Jordan sont plus symétriques et par suite plus faciles à retenir.

Les démonstrations en petits caractères ne sont pas indispensables à l'intelligence du texte.

On trouve à la fin du Volume un Tableau faisant correspondre nos notations à celles des autres auteurs modernes.

CHAPITRE II.

DES SÉRIES θ : ROLE DES PÉRIODES, ADDITION, USAGE POUR LA CONSTITUTION DE FONCTIONS ELLIPTIQUES, RELATIONS QUADRATIQUES [FORMULES (1) A (19)].

Étude préliminaire d'une fonction holomorphe.

La série que nous voulons étudier est la suivante

$$(a) \qquad \varphi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)z + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 a},$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs entières de n, de $-\infty$ à $+\infty$.

THÉORÈME I. — *La série* (a) *est convergente, quelle que soit* z, *pourvu que la constante* a *soit une quantité négative ou une imaginaire à partie réelle négative.*

En effet, le rapport d'un terme au précédent, pour les valeurs positives de n, est

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = -e^{z+2na} = -e^z e^{2na}.$$

Si la constante a est réelle, il faut et il suffit qu'elle soit négative pour que le facteur e^{2na} tende vers zéro, lorsque n croît à l'infini; sinon, soit $a = a' + b'i$, le module de ce facteur (p. 3) est $e^{2na'}$ et il faut que la partie a' soit négative pour que le module du rapport considéré tende vers zéro.

Même démonstration pour la partie de la série qui correspond aux valeurs négatives de n; il suffit de changer n en $-n$.

Remarque. — J'admettrai sans démonstration que $\varphi(z)$ a une dérivée qui est la somme des dérivées des termes de $\varphi(z)$. C'est une fonction holomorphe.

Périodicité. — La fonction $\varphi(z)$ admet la période $4\pi i$, car l'addition de $4\pi i$ à z revient à multiplier le terme de rang n par $\cos(2n+1)2\pi + i\sin(2n+1)2\pi = 1$,

$$(b) \qquad \varphi(z+4\pi i) = \varphi(z).$$

Remarquons, en passant, la formule

$$(c) \qquad \varphi(z+2\pi i) = -\varphi(z).$$

Ajoutons maintenant $2a$ à l'argument z,

$$(d) \qquad \left\{\begin{aligned} \varphi(z+2a) &= \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)z+\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]a} \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{-z-a} e^{\left(n+\frac{3}{2}\right)z+\left(n+\frac{3}{2}\right)^2 a}, \\ \varphi(z+2a) &= -e^{-(z+a)}\varphi(z). \end{aligned}\right.$$

La fonction $\varphi(z)$ est donc de la classe de celles que nous avons appelées, dans le Chapitre I, *fonctions périodiques de troisième espèce.*

Corollaire. — On a

$$(e) \qquad \left\{\begin{aligned} \varphi(z+4a) &= e^{2(z+2a)}\varphi(z), \\ \varphi(z+2ma) &= (-1)^m e^{m(z+ma)}\varphi(z). \end{aligned}\right.$$

Théorème II. — *Les formules* (c) *et* (d) *définissent entièrement la fonction* $\varphi(z)$, *à un facteur constant près.*

On suppose toutefois la possibilité des développements en séries pour les fonctions que l'on veut caractériser. Posons, en effet,

$$e^{\frac{z}{2}} = t, \qquad \varphi(z) = f(t),$$

la formule (c) devient

$$(c') \qquad f(-t) = -f(t),$$

et la formule (d), puisque ajouter a à z revient à multiplier t^2 par $q\,(q = e^a)$,

$$(d') \qquad qt^2 f(qt) = -f(t).$$

Cela posé, une série, ordonnée suivant les puissances impaires de t pour satisfaire à la condition (c'), s'écrira

$$S(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n t^{2n+1},$$

et la condition (d') donne immédiatement une loi de récurrence entre deux coefficients successifs

$$A_n = -A_{n-1} q^{2n},$$

d'où l'on déduit

$$A_n = (-1)^n A_0 q^{n(n+1)} = (-1)^n q^{-\frac{1}{4}} A_0 q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Le facteur $A_0 q^{-\frac{1}{4}}$ étant le même pour tous les termes de $S(t)$, on a

$$S(t) = A_0 q^{-\frac{1}{4}} f(t). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème III. — *La fonction $\varphi(z)$ est une fonction impaire.*

En effet, changeons z en $-z$; nous avons

$$\varphi(-z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)z + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 a},$$

et, si nous posons

$$n = -n' - 1,$$

$$\varphi(-z) = -\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{n'} e^{\left(n'+\frac{1}{2}\right)z + \left(n'+\frac{1}{2}\right)^2 a}$$

$$= -\varphi(z). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Expressions diverses de $\varphi(z)$. — Soit

$$(f) \qquad q = e^a;$$

d'après les hypothèses faites sur a, q sera une constante réelle inférieure à un, ou imaginaire de module inférieur à un. $\varphi(z)$ peut s'écrire

$$\varphi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)z}.$$

On peut encore écrire

$$(g) \qquad \varphi(z) = e^{-\frac{z^2}{4a}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{\frac{[z+(2n+1)a]^2}{4a}}.$$

Zéros de $\varphi(z)$. — Considérons la dernière forme et récrivons, en mettant p au lieu de n,

$$(h) \qquad \varphi(z) = e^{-\frac{z^2}{4a}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^p e^{\frac{[z+(2p+1)a]^2}{4a}}.$$

Nous allons chercher à déterminer des valeurs de z telles que les deux termes généraux des formules (g) et (h) soient égaux et de signes contraires. On aura alors, pour ces valeurs de z,

$$\varphi(z) = -\varphi(z)$$

et, par suite,

$$\varphi(z) = 0.$$

Il faut donc que

$$(-1)^{n-p} e^{\frac{[z+(2n+1)a]^2}{4a}} = -e^{\frac{[z+(2p+1)a]^2}{4a}}$$

ou

$$e^{\frac{[z+(2n+1)a]^2}{4a} - \frac{[z+(2p+1)a]^2}{4a}} = -1^{p-n+1} = e^{\pi i(p-n+1)},$$

ce qui entraîne

$$\frac{[z+(2n+1)a]^2}{4a} - \frac{[z+(2p+1)a]^2}{4a} = (p-n+1+2k)\pi i$$

ou

$$(n-p)\left[\frac{z+(n+p+1)a}{\pi i} + 1\right] = 2k+1$$

le nombre k étant un nombre entier positif, négatif ou nul, qui peut d'ailleurs varier avec n. Il faut donc que les deux facteurs du premier membre soient séparément impairs, ou encore, puisque $n-p$ et $n+p$ sont de même parité, que

$$n+p=-(2m+1),$$
$$z+(n+p+1)a=2m'\pi i;$$

on déduit de là

$$(i) \qquad z=2ma+2m'\pi i,$$

m et m' étant des nombres entiers qui peuvent recevoir des valeurs constantes arbitraires, positives ou négatives sans exclure la valeur zéro.

La formule (i) fait connaître une double infinité de zéros de $\varphi(z)$; nous admettrons que ce sont les seuls, ce que va d'ailleurs prouver immédiatement la décomposition de $\varphi(z)$ en facteurs.

Décomposition de $\varphi(z)$ en facteurs. — La décomposition peut être prévue d'après ce qui vient d'être démontré. Formons un produit qui admette les racines

$$z=2ma+2m'\pi i,$$

c'est-à-dire qui s'annule lorsque

$$e^z=+e^{2ma}.$$

Posons, comme plus haut,

$$t=e^{\frac{z}{2}}, \qquad q=e^a.$$

Les facteurs du produit seront de la forme

$$t^2-q^{2m},$$

ou plutôt, comme un produit ne peut converger vers une valeur finie non nulle que si les facteurs tendent vers un, les facteurs seront de la forme $1=\frac{q^{2m}}{t^2}$ pour les valeurs positives de m et de la forme $1-q^{2m}t^2$ pour les facteurs qui, primitivement, correspondaient aux valeurs négatives de m. En d'autres termes, le produit à considérer sera

$$F(t)=A\frac{t^2-1}{t}\prod_1^\infty(1-q^{2m}t^2)\prod_1^\infty\left(1-\frac{1}{t^2}q^{2m}\right);$$

le signe Π indique qu'il faut faire le produit des facteurs que l'on obtient en donnant à m les valeurs $1, 2, \ldots$ jusqu'à l'infini. Le facteur, mis avant les produits Π, tient à ce que $F(t)$ doit s'annuler pour $t = 1 (z = 0)$, et changer de signe sans changer de valeur lorsqu'on change t en $\frac{1}{t}$ (z en $-z$). A ne dépend que de q. Le produit $F(t)$ sera convergent si $|q|$ est plus petit que 1, ce qui est l'hypothèse.

Or ce produit jouit des deux propriétés suivantes évidentes :

$$\begin{cases} F(-t) = -F(t), \\ qt^2 F(qt) = -Ft. \end{cases}$$

Donc, d'après le théorème II, il ne diffère que par un facteur constant de la fonction $f(t)$ ou $\varphi(z)$ et nous pourrons écrire :

$$(j) \qquad \varphi(z) = A \frac{e^z - 1}{e^{\frac{z}{2}}} \prod_1^\infty (1 - q^{2m} e^z) \prod_1^\infty (1 - e^{-z} q^{2m}).$$

Les zéros s'obtiendront en annulant un quelconque des facteurs

$$e^z = e^{2ma},$$
$$z = 2ma + 2m'\pi i.$$

Remarque. — Soit $z = ui$, $\Psi u = \varphi(z)$, comme

$$(1 - q^{2m} e^z)(1 - e^{-z} q^{2m}) = 1 - q^{2m}(e^z + e^{-z}) + q^{4m},$$

on aura, par les formules d'Euler (page 3).

$$(k) \qquad \Psi(u) = A_1 \sin \frac{u}{2} \prod_1^\infty (1 - 2q^{2m} \cos u + q^{4m}).$$

A la fonction $\varphi(z)$ sont intimement liées trois fonctions qu'on obtient en ajoutant à z soit πi, soit a; mais nous laisserons au lecteur le soin de les étudier (*voir* les exercices à la fin du Chapitre). Nous retrouverons, d'ailleurs, les mêmes calculs en partant de la fonction θ que nous allons maintenant définir.

De la fonction θ. — L'usage s'est établi d'autres notations et, en fait, si nous conservions la fonction $\varphi(z)$, dans les applications, il faudrait donner à z des valeurs imaginaires; la variable que nous allons introduire, au contraire, sera presque toujours réelle. Il convient, de plus, d'avoir à sa disposition une période

quelconque au lieu d'un multiple de π; la période que nous allons introduire sera, en général, réelle. Nous substituerons en même temps à a une nouvelle constante.

Voici les substitutions à faire

$$z = \frac{\pi i}{\omega_1} u, \qquad a = \frac{\pi i}{\omega_1} \omega_2;$$

$2\omega_1$ et $2\omega_2$ s'appellent les *deux périodes*.

La fonction $\varphi(z)$ se transforme alors en une nouvelle fonction $\theta(u)$, après multiplication par un facteur $-i$, dont l'utilité apparaîtra immédiatement,

$$(1) \qquad \theta u = -i \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi i}{\omega_1} u} \qquad \left(q = e^{\frac{\pi i \omega_2}{\omega_1}}\right).$$

En groupant les deux termes qui correspondent à n et à $-n-1$, et appliquant la deuxième formule d'Euler (page 3), on obtient la nouvelle forme, dont tout signe imaginaire a disparu,

$$(1\,bis) \qquad \theta u = 2 \sum_{0}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \sin(2n+1)\frac{\pi u}{2\omega_1}.$$

Pour la convergence, il sera nécessaire et suffisant que $|q|$ soit inférieur à 1, c'est-à-dire que ω_2 soit égale à une quantité positive multipliée par $\sqrt{-1}$, si ω_1 est une quantité réelle et positive, ou plus généralement que le rapport $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ ait sa partie imaginaire positive.

Les formules (b), (c), (d), (e), démontrées pour la fonction $\varphi(z)$, donnent immédiatement les formules correspondantes relatives à θu,

$$(2) \qquad \theta(u + 4\omega_1) = \theta u,$$

$$(3) \qquad \theta(u + 2\omega_1) = -\theta u,$$

$$(4) \qquad \begin{cases} \theta(u + 2\omega_2) = -e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}(u+\omega_2)} \theta u, \\ \theta(u + 2m\omega_2) = (-1)^m e^{-\frac{m\pi i}{\omega_1}(u+m\omega_2)} \theta u. \end{cases}$$

Les zéros de θu seront donnés par la formule

$$u = 2m\omega_1 + 2m'\omega_2, \tag{5}$$

déduite de la formule (i).

La symétrie de cette formule a conduit à donner le nom de *périodes* aux quantités ω_1 et ω_2, quoique, en réalité, $4\omega_1$ seule soit une période de θu. Cette désignation sera amplement justifiée par la suite.

La fonction θu est impaire comme $\varphi(z)$ et s'annule pour $u = 0$; sa décomposition en facteurs résulterait de la formule (k).

THÉORÈME. — *Les zéros de $\theta(u)$ sont simples.*

Les formules (3) et (4) montrent qu'il suffit de le démontrer pour $u = 0$. Or

$$\theta'(u) = \frac{\pi}{\omega_1} \sum_0^\infty (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} (2n+1)\cos(2n+1)\frac{\pi u}{2\omega_1},$$

donc

$$\theta'(0) = \frac{\pi}{\omega_1}\left(q^{\frac{1}{4}} - 3q^{\frac{9}{4}} + 5q^{\frac{25}{4}} \ldots\right). \tag{6}$$

Si q est infiniment petit, la valeur principale de $\theta'(0)$ est $\frac{\pi}{\omega_1} q^{\frac{1}{4}}$, non nulle; ce qui suffit à prouver que $\theta'(0)$ n'est pas nulle, en général, et, par conséquent, que $u = 0$ est une racine simple de θu.

THÉORÈME dit *de l'équation à trois termes.* — *La fonction $\theta(u)$ vérifie l'équation*

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi(b-c)\varphi(b+c)\varphi(a-d)\varphi(a+d) \\ &+\varphi(c-a)\varphi(c+a)\varphi(b-d)\varphi(b+d) \\ &+\varphi(a-b)\varphi(a+b)\varphi(c-d)\varphi(c+d) = 0. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Posons, en effet,

$$i\theta(u) = \varphi(u) = \sum (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi i u}{\omega_1}}.$$

Soient A, B, C les trois termes de l'équation à vérifier, (A),

(B), (C) les termes généraux de ces trois termes :

$$\begin{aligned}(A) = \quad & (-1)^n q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} e^{(2n+1)\pi i \frac{b-c}{2\omega_1}} (-1)^p q^{\frac{(2p+1)^2}{4}} e^{(2p+1)\pi i \frac{b+c}{2\omega_1}} \\ & \times (-1)^r q^{\frac{(2r+1)^2}{4}} e^{(2r+1)\pi i \frac{a-d}{2\omega_1}} (-1)^s q^{\frac{(2s+1)^2}{4}} e^{(2s+1)\pi i \frac{a+d}{2\omega_1}} \\ = \quad & (-1)^\mu q^{\frac{\alpha^2}{4}} e^{\frac{\pi i}{2\omega_1}\beta},\end{aligned}$$

en posant

$$\begin{cases} \mu = n+p+r+s, \\ \alpha^2 = (2n+1)^2 + (2p+1)^2 + (2r+1)^2 + (2s+1)^2, \\ \beta = (2n+1)(b-c) + (2p+1)(b+c) + (2r+1)(a-d) + (2s+1)(a+d); \end{cases}$$

on aura de même

$$(B) = (-1)^{\mu'} q^{\frac{\alpha'^2}{4}} e^{\frac{\pi i}{2\omega}\beta'},$$

en posant

$$\begin{cases} \mu' = n'+p'+r'+s', \\ \alpha'^2 = (2n'+1)^2 + (2p'+1)^2 + (2r'+1)^2 + (2s'+1)^2, \\ \beta' = (2n'+1)(c-a) + (2p'+1)(c+a) + (2r'+1)(b-d) + (2s'+1)(b+d). \end{cases}$$

et (C) sera composé d'une manière analogue. Nous allons chercher si, à tout terme de (A), il est possible de faire correspondre, quelles que soient les valeurs de a, b, c, d, un terme de B qui le détruise.

Il faudra pour cela d'abord que $\beta = \beta'$, c'est-à-dire que

$$2r+1+2s+1 = 2p'+1-(2n'+1)\ldots,$$

ou

$$(l) \qquad \begin{cases} r+s+1 = p'-n', \\ p+n \quad = r'+s', \\ p-n \quad = p'+n'+1, \\ s-r \quad = s'-r', \end{cases}$$

d'où l'on peut tirer les valeurs de

$$\begin{aligned} n' &= \frac{1}{2}(n+p+r+s) - n &&= \frac{1}{2}\mu - n, \\ p' &= -\frac{1}{2}(n+p+r+s) + p - 1 &&= -\frac{1}{2}\mu + p - 1, \\ r' &= \frac{1}{2}(n+p+r+s) - s &&= \frac{1}{2}\mu - s, \\ s' &= \frac{1}{2}(n+p+r+s) - r &&= \frac{1}{2}\mu - r, \end{aligned}$$

et par addition

$$n' + p' + r' + s' = 2p - 1.$$

Il résulte de ces égalités : 1° qu'un terme de A ne pourra être détruit par un terme de B que si μ ou $n + p + r + s$ est pair (supposons-le); 2° que les deux termes considérés seront bien, dans cette hypothèse, de signes contraires. Il reste à vérifier que les exposants de q sont bien égaux, $\alpha^2 = \alpha'^2$; on doit avoir

$$n^2 + p^2 + r^2 + s^2 + \mu = n'^2 + p'^2 + r'^2 + s'^2 + \mu'.$$

Mais les égalités (l) donnent, en les ajoutant membre à membre après avoir élevé leurs deux membres au carré,

$$n^2 + p^2 + r^2 + s^2 + r + s = n'^2 + p'^2 + r'^2 + s'^2 + p' + n',$$

ou en ajoutant aux deux membres $p + n = r' + s'$, ce qu'il fallait vérifier.

On verrait de même, en résolvant les équations (l) par rapport à n, p, r, s, ce qui donnerait, par exemple,

$$2p = n' + p' + r' + s' + 1,$$

qu'un terme de B ne peut être détruit par un terme de A que si μ' est impair, mais alors qu'à tout terme de B à exposant impair correspond effectivement, dans A, un terme qui le détruit. Donc les termes de degrés pairs, dans A, sont exactement détruits par les termes de degrés impairs de B. De même les termes pairs de B seront détruits par les termes impairs de C, et les termes pairs de C par les termes impairs de A. L'équation à trois termes est donc établie, et l'on a

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \theta(b-c)\theta(b+c)\theta(a-d)\theta(a+d) \\ + \theta(c-a)\theta(c+a)\theta(b-d)\theta(b+d) \\ + \theta(a-b)\theta(a+b)\theta(c-d)\theta(c+d) = 0. \end{array} \right.$$

Les fonctions θ_1, θ_2, θ_3. — De même qu'en Trigonométrie il est commode de considérer, en même temps que la fonction impaire $\sin x$, la fonction paire $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, de même nous adjoindrons à la fonction θ les trois fonctions qu'on obtient en ajoutant à l'argument u les demi-périodes ω_1, ω_2 et $\omega_1 + \omega_2$. Pour des

raisons de notations que la suite justifiera [formules (11), (12), (13)], on a, de plus, multiplié par de certains facteurs ; voici les définitions exactes :

$$(10)\qquad \begin{cases} \theta_1 u = \theta(u+\omega_1), \\ \theta_2 u = -iq^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi i u}{2\omega_1}} \theta(u+\omega_2), \\ \theta_3 u = \theta_2(u+\omega_1) = -iq^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi i u}{2\omega_1}} \theta(u+\omega_1+\omega_2). \end{cases}$$

On peut remarquer que, à un facteur près pour $\theta_2 u$, θ_1 se déduit de θ par l'addition de ω_1 à l'argument, θ_2 par celle de ω_2. On est alors amené à introduire, par analogie, une troisième constante ω_3 ; si l'on pose, pour la symétrie,

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0,$$

la troisième formule (10) devient

$$\theta_3 u = iq^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi i}{2\omega_1} u} \theta(u+\omega_3);$$

nous laisserons comme exercice à démontrer cette formule que nous n'utiliserons pas. On voit que θ_3 se déduit de θ, à un facteur près, par l'addition de ω_3 à l'argument ; cette constante ω_3 jouera un grand rôle pour la symétrie de nos formules ultérieures.

Développements des fonctions θ_1, θ_2, θ_3 en séries d'exponentielles ou de cosinus. — En écrivant $u+\omega_1$ au lieu de u dans la formule (1), on a

$$\theta_1 u = -i \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)\frac{\pi i(u+\omega_1)}{2\omega_1}};$$

or

$$e^{(2n+1)\frac{\pi i \omega_1}{2\omega_1}} = \cos(2n+1)\frac{\pi}{2} + i\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}$$
$$= (-1)^n i.$$

Donc

$$(11)\qquad \theta_1(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi i}{\omega_1} u}$$

et, en groupant les termes qui ont dans l'exposant n et $-n-1$,

$$(11\,bis)\qquad \theta_1(u) = 2\sum q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\omega_1}u.$$

De même la seconde formule (10) conduit, pour $\theta_2(u)$, à la valeur suivante :

$$\theta_2 u = -ie^{\frac{\pi i(\omega_2+2u)}{4\omega_1}}(-i)\sum(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi i}{\omega_1}(u+\omega_2)}$$

$$= \sum(-1)^{n+1} q^{(n+1)^2} e^{(n+1)\frac{\pi i}{\omega_1}u}$$

ou, plus simplement,

$$(12)\qquad \theta_2 u = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{n\frac{\pi i}{\omega_1}u};$$

d'où, en groupant les termes qui correspondent à n et à $-n$,

$$(12\,bis)\qquad \theta_2 u = 1 + 2\sum_1^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos n\frac{\pi}{\omega_1}u.$$

Enfin, à cause de la dernière formule (10),

$$(13)\qquad \theta_3 u = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{\frac{n\pi i}{\omega_1}u},$$

$$(13\,bis)\qquad \theta_3 u = 1 + 2\sum_1^{\infty} q^{n^2}\cos n\frac{\pi}{\omega_1}u.$$

Propriétés des fonctions θ_α. — Les développements en séries de cosinus démontrent immédiatement que ces trois fonctions ne changent pas de valeur si l'on change u en $-u$; elles sont paires. Quant à la fonction θ, elle est évidemment impaire, comme $\varphi(z)$: on a donc

$$(14)\qquad \begin{aligned} \theta(-u) &= -\theta\, u,\\ \theta_1(-u) &= \theta_1 u,\\ \theta_2(-u) &= \theta_2 u,\\ &\ \theta_3 u. \end{aligned}$$

L'addition de ω_1, de ω_2, de $2\omega_1$ et de $2\omega_2$, produit sur les fonctions θ_α des effets analogues à ceux produits sur θ, et, comme ce sont au fond toujours les mêmes calculs à effectuer, nous nous bornerons, pour éviter des redites fastidieuses, à transcrire les résultats faciles à vérifier; ceux relatif à θu ont d'ailleurs déjà été établis.

Addition des périodes.

$$(15)\quad \begin{cases} \theta\,(u+2\omega_1) = -\theta\,u, \\ \theta_1(u+2\omega_1) = -\theta_1 u, \\ \theta_2(u+2\omega_1) = \theta_2 u, \\ \theta_3(u+2\omega_1) = \theta_3 u; \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} \theta\,(u+2\omega_2) = -e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}(u+\omega_2)}\,\theta\,u, \\ \theta_1(u+2\omega_2) = e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}(u+\omega_2)}\,\theta_1 u, \\ \theta_2(u+2\omega_2) = -e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}(u+\omega_2)}\,\theta_2 u, \\ \theta_3(u+2\omega_2) = e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}(u+\omega_2)}\,\theta_3 u. \end{cases}$$

Addition des demi-périodes.

$$(17)\quad \begin{cases} \theta\,(u+\omega_1) = \theta_1 u, \\ \theta_1(u+\omega_1) = -\theta\,u, \\ \theta_2(u+\omega_1) = \theta_3 u, \\ \theta_3(u+\omega_1) = \theta_2 u; \end{cases}$$

$$(18)\quad \begin{cases} \theta\,(u+\omega_2) = iq^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\pi i}{2\omega_1}u}\,\theta_2 u, \\ \theta_1(u+\omega_2) = q^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\pi i}{2\omega_1}u}\,\theta_3 u, \\ \theta_2(u+\omega_2) = iq^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\pi i}{2\omega_1}u}\,\theta\,u, \\ \theta_3(u+\omega_2) = q^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\pi i}{2\omega_1}u}\,\theta_1 u. \end{cases}$$

Zéros des fonctions θ_α. — Ces zéros résultent immédiatement des formules (17) et (18). Ainsi, pour que $\theta_1 u$ soit nulle, il faut que $\theta(u+\omega_1)$ le soit, ou que [formule (5)]

$$u + \omega_1 = 2m\omega_1 + 2m'\omega_2$$

ou

$$u = (2m+1)\omega_1 + 2m'\omega_2,$$

ainsi des autres. D'où le Tableau suivant, où nous avons reproduit la formule (5),

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{lll} \text{Zéros de } \theta u \ldots\ldots & & 2m\omega_1 + 2m'\omega_2 \\ \quad\text{»} \quad \text{de } \theta_1 u \ldots\ldots & & (2m+1)\omega_1 + 2m'\omega_2 \\ \quad\text{»} \quad \text{de } \theta_2 u \ldots\ldots & & 2m\omega_1 + (2m'+1)\omega_2 \\ \quad\text{»} \quad \text{de } \theta_3 u \ldots\ldots & & (2m+1)\omega_1 + (2m'+1)\omega_2 \end{array}\right.$$

On peut remarquer que

Zéro annule.....	θu
ω_1 annule.....	$\theta_1 u$
ω_2 annule.....	$\theta_2 u$
$\omega_3 = -(\omega_1 + \omega_2)$ annule.....	$\theta_3 u$

Remarque. — On pose souvent

$$\frac{u}{2\omega_1} = v, \qquad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \tau.$$

Les fonctions $\theta_\alpha u$ deviennent alors des $\vartheta_\alpha v$; les formules correspondant à celles que nous avons obtenues s'obtiennent en ajoutant à v soit 1 ou $\frac{1}{2}$ soit τ ou $\frac{\tau}{2}$. Mais nous ne ferons pas usage de cette notation.

Remarque importante. — Les séries θ sont très convergentes et, dans la pratique, le module de q est suffisamment petit pour qu'il suffise de considérer un ou au plus deux termes de ces séries.

Considérations sur la réalité de ces fonctions. — Si ω_1 et $\frac{\omega_2}{i}$ sont réelles et positives, q est réelle, inférieure à l'unité et l'on voit, par les formules (1 *bis*), (11 *bis*), (12 *bis*) et (13 *bis*), que les fonctions θ sont réelles pour toutes les valeurs réelles de u. Les constantes $\theta'(0)$, $\theta_\alpha(0)$, qui jouent un rôle important dans ce précis, sont aussi réelles. Il n'en est pas de même si ω_1 et ω_2 sont des imaginaires; même dans le cas où ce sont des imaginaires

conjuguées, il n'est pas possible de rien dire ici de général sur la réalité de ces fonctions.

Premier aperçu sur les fonctions elliptiques. — Le quotient de deux fonctions θ est doublement périodique : par exemple, $\frac{\theta(u)}{\theta_2(u)}$ admet la période $4\omega_1$ et la période $2\omega_2$ [formules (15) et (16)].

Relations entre les carrés de trois fonctions θ (¹). — Je devrais ici établir les relations quadratiques qui existent entre les différentes fonctions que nous venons de rencontrer; mais les plus utiles de ces relations se présenteront d'elles-mêmes plus loin (*voir* page 52). Je me bornerai à quelques indications succinctes qui suffiront à retrouver les résultats dont j'aurai besoin.

Une quelconque des fonctions θ a pour terme général une expression de la forme

$$(-1)^{\alpha n} q^{\left(n+\frac{\beta}{2}\right)^2} e^{\left(n+\frac{\beta}{2}\right)\pi i \frac{u}{\omega_1}},$$

dans laquelle α et β peuvent recevoir indifféremment les valeurs 0 et 1. Si l'on fait le carré de cette fonction θ, il faudra multiplier le terme précédent par un terme analogue,

$$(-1)^{\alpha p} q^{\left(p+\frac{\beta}{2}\right)^2} e^{\left(p+\frac{\beta}{2}\right)\pi i \frac{u}{\omega_1}};$$

et le résultat pourra se mettre sous la forme

$$(-1)^{m\alpha} q^{\frac{(m+\beta)^2+l^2}{2}} e^{(m+\beta)\pi i \frac{u}{\omega_1}};$$

en posant $m = n + p$ et $l = n - p$, m et l sont de même parité. Le terme précédent peut encore s'écrire :

$$(-1)^{(m+\beta)\alpha}(-1)^{\alpha\beta} q^{\frac{(m+\beta)^2+l^2}{2}} e^{(m+\beta)\pi i \frac{u}{\omega_1}}.$$

Les termes pour lesquels m est pair seront multipliés par un

(¹) Tout ce paragraphe, jusqu'à la fin du Chapitre, peut être passé à une première lecture; mais il faut, en tous cas, noter les formules (m), (p), (q) et, surtout, la formule fondamentale (s).

coefficient $\Sigma q^{\frac{l^2}{2}}$ dans lequel l reçoit toutes les valeurs paires; on voit que, en séparant les termes pour lesquels m est pair des autres, on pourra exprimer les carrés des θ en fonction de deux séries Φ_0 et Φ_2, de sorte qu'on aura

$$\begin{aligned}
\theta^2(u) &= a\ \Phi_0(u) + b\ \Phi_2(u),\\
\theta_1^2(u) &= a_1\Phi_0(u) + b_1\Phi_2(u),\\
\theta_2^2(u) &= a_2\Phi_0(u) + b_2\Phi_2(u),\\
\theta_3^2(u) &= a_3\Phi_0(u) + b_3\Phi_2(u).
\end{aligned}$$

Il n'y a plus qu'à éliminer Φ_0 et Φ_2 entre trois de ces quatre équations pour avoir les relations cherchées; l'une d'elles sera de la forme

$$\theta^2 u = \alpha\theta_1^2 u + \beta\theta_2^2 u.$$

Pour avoir β, faisons $u = \omega_1$, et utilisons les formules (17)

$$\beta = \frac{\theta^2\omega_1}{\theta_2^2\omega_1} = \frac{\theta_1^2(0)}{\theta_3^2(0)}.$$

Pour avoir α, je ferai $u = \omega_2$ et je me reporterai aux formules (8),

$$\alpha = \frac{\theta^2\omega_2}{\theta_1^2\omega_2} = -\frac{\theta_2^2(0)}{\theta_3^2(0)};$$

d'où la formule

$$\theta^2 u = \frac{\theta_1^2(0)}{\theta_3^2(0)}\theta_2^2 u - \frac{\theta_2^2(0)}{\theta_3^2(0)}\theta_1^2 u;$$

les autres formules se déduiront de celle-ci en ajoutant à u soit ω_1, soit ω_2, soit $\omega_1 + \omega_2$.

On pose ordinairement

$$(m) \qquad \sqrt{k} = \frac{\theta_1(0)}{\theta_3(0)}, \qquad \sqrt{k'} = \frac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)};$$

k est appelé le *module* et k' le *module complémentaire;* les formules définitives sont, avec cette notation,

$$(n) \qquad \left\{\begin{aligned}
\theta^2 u &= k\theta_2^2 u - k'\theta_1^2 u,\\
\theta_1^2 u &= k\theta_3^2 u - k'\theta^2 u,\\
\theta_2^2 u &= k\theta^2 u + k'\theta_3^2 u.
\end{aligned}\right.$$

Ces trois relations se réduisent évidemment à deux. Dans la troisième, faisons $u = \omega_1$; elle devient

$$\theta_2^2 \omega_1 = k\theta^2 \omega_1 + k'\theta_3^2 \omega_1$$

ou

$$\theta_3^2(0) = k\theta_1^2(0) + k'\theta_2^2(0).$$

Remplaçons k et k' par leurs valeurs; nous obtenons la relation

$$(o) \qquad \theta_3^4(0) = \theta_1^4(0) + \theta_2^4(0).$$

Au contraire, divisons les deux membres de cette équation par $\theta_4^3(0)$ et remplaçons les quotients par leurs valeurs (m), nous obtenons

$$(o') \qquad k^2 + k'^2 = 1.$$

Cette équation explique les noms de *module* et de *module complémentaire* donnés à k et à k'.

Il existe une seconde relation entre les quatre fonctions; je vais indiquer une première méthode pour l'établir, elle résultera aussi d'autres formules qui seront démontrées plus loin. Nous avons vu [formule (j) de ce Chapitre] que

$$\varphi(z) = A\frac{e^z - 1}{e^{\frac{z}{2}}}\prod_1^\infty (1 - q^{2m}e^z)(1 - e^{-z}q^{2m}),$$

d'où

$$(p) \qquad \theta u = 2A \sin\frac{\pi u}{2\omega_1}\prod_1^\infty \left(1 - 2q^{2m}\cos\frac{\pi u}{\omega_1} + q^{4m}\right).$$

Les équations (10) permettront alors d'obtenir les développements des θ_α en produits; on trouvera aisément

$$(q) \qquad \left\{\begin{aligned} \theta_1(u) &= 2A\cos\frac{\pi u}{2\omega_1}\prod_1^\infty\left(1 + 2q^{2m}\cos\frac{\pi u}{\omega_1} + q^{4m}\right),\\ \theta_2(u) &= A\prod_1^\infty\left(1 - 2q^{2m-1}\cos\frac{\pi u}{\omega_1} + q^{4m-2}\right),\\ \theta_3(u) &= A\prod_1^\infty\left(1 + 2q^{2m-1}\cos\frac{\pi u}{\omega_1} + q^{4m-2}\right).\end{aligned}\right.$$

On en conclut

$$(r)\quad \begin{cases} \theta'(0) = \dfrac{\pi}{\omega_1} A \prod\limits_1^\infty (1-q^{2m})^2 = \dfrac{\pi}{\omega_1} AP^2, \\[2ex] \theta_1(0) = 2A \prod\limits_1^\infty (1+q^{2m})^2 = 2AQ^2, \\[2ex] \theta_2(0) = A \prod\limits_1^\infty (1-q^{2m-1})^2 = AR^2, \\[2ex] \theta_3(0) = A \prod\limits_1^\infty (1+q^{2m-1})^2 = AS^2. \end{cases}$$

Mais

$$\begin{aligned} QS &= (1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots \\ &= \frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots} = \frac{1}{(1-q)(1-q^3)\ldots} = \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Donc, en combinant les équations (r) membre à membre d'une manière facile à saisir

$$\theta'(0) = \frac{\pi}{2\omega_1}\frac{P^2}{A^2}\theta_1(0)\theta_2(0)\theta_3(0).$$

Mais nous allons voir que

$$P = A.$$

On a donc enfin l'importante relation

(5) (1) $$\theta'(0) = \frac{\pi}{2\omega_1}\theta_1(0)\theta_2(0)\theta_3(0).$$

Calcul de A. — Pour écarter des difficultés de signes et par analogie avec la méthode de M. Biehler, exposée dans la Note mise par M. Hermite à la fin de la cinquième édition de Serret, je considérerai de préférence la troisième formule (q)

$$\begin{aligned} \theta_3 u &= A \prod \left(1 + 2q^{2m-1}\cos\frac{\pi u}{\omega_1} + q^{4m-2}\right) \\ &= A \prod \left[1 + q^{2m-1}\left(e^{\frac{\pi u}{\omega_1}} + e^{-\frac{\pi u}{\omega_1}}\right) + q^{4m-2}\right] \\ &= A \prod \left(1 + q^{2m-1} e^{\frac{\pi u}{\omega_1}}\right)\left(1 + q^{2m-1} e^{-\frac{\pi u}{\omega_1}}\right). \end{aligned}$$

Posons

$$e^{\frac{\pi u}{\omega_1}} = z$$

et appelons $f_m(z)$, le produit précédent Π limité au $m^{\text{ième}}$ facteur. Il vient

$$f_m(z) = (1+qz)(1+q^3z)\ldots(1+q^{2m-1}z)$$
$$\times\left(1+\frac{q}{z}\right)\left(1+\frac{q^3}{z}\right)\ldots\left(1+\frac{q^{2m-1}}{z}\right),$$

$$\theta_3 u = \mathrm{A}\lim f_m(z) \qquad \text{pour} \qquad m=\infty.$$

Le développement de $f_m(z)$ suivant les puissances ascendantes de z, évidemment réciproque, se présentera ainsi

$$f_m(z) = \frac{\mathrm{B}_m}{z^m} + \frac{\mathrm{B}_{m-1}}{z^{m-1}} + \ldots + \frac{\mathrm{B}_1}{z} + \mathrm{B}_0 + \mathrm{B}_1 z + \ldots + \mathrm{B}_{m-1}z^{m-1} + \mathrm{B}_m z^m.$$

Soit β_0 la limite de B_0 lorsque m s'étend à l'infini; $\mathrm{A}\beta_0$ représente le terme de $\theta_3 u$ indépendant de z ou de u, c'est-à-dire un. On aura donc

$$\mathrm{A} = \frac{1}{\beta_0},$$

et tout revient à trouver β_0. Or, en changeant z en q^2z, on a évidemment

$$(q^{2m}+q^2)f_m(q^2z) = (1+q^{2m-1}z)f_m(z),$$

d'où l'on déduira une relation entre les B_k

$$\mathrm{B}_k = \mathrm{B}_{k-1}\frac{q^{2k-1}(1-q^{2m-2k+2})}{1-q^{2m+2k}}.$$

En changeant k en $k-1$, $k-2$, ... et multipliant membre à membre les égalités ainsi obtenues, on trouve

$$\mathrm{B}_k = \mathrm{B}_0\frac{q^{k^2}(1-q^{2m})\ldots(1-q^{2m-2k+2})}{(1-q^{2m+2})\ldots(1-q^{2m+2k})}.$$

Or B_m se calcule directement : sa valeur est q^{m^2}.

Donc, en faisant $k=m$ dans l'égalité précédente, on aura

$$\mathrm{B}_0 = \frac{(1-q^{2m+2})\ldots(1-q^{2m+2k})}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2m})},$$

et, comme ces produits sont absolument convergents $|q|<1$, on aura, pour $m=\infty$,

$$\beta_0 = \lim \mathrm{B}_0 = \frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2m})\ldots} = \frac{1}{\mathrm{P}}.$$

Donc enfin

$$A = \frac{1}{\beta_0} = P.$$

C. Q. F. D.

Exercices sur le Chapitre II.

1. Étudier directement les fonctions suivantes :

$$\varphi_1(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)z + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 a},$$

$$\varphi_2(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{nz + n^2 a},$$

$$\varphi_3(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{nz + n^2 a}.$$

Montrer que ces fonctions sont paires. En déduire les fonctions $\theta_1(u)$, $\theta_2(u)$, $\theta_3(u)$ et les propriétés de ces fonctions.

2. Démontrer que l'on a

$$\varphi_1(z) = A\,\varphi(z + \pi i),$$
$$\varphi_2(z) = B\,\varphi(z + a),$$
$$\varphi_3(z) = C\,\varphi_2(z + \pi i) = D\,\varphi(z + a),$$

et déterminer les facteurs A, B, C, D.

3. Démontrer la formule

$$\theta_3 = iq^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi i}{2\omega_1} u}\,\theta(u + \omega_3),$$

dans laquelle

$$\omega_3 = -(\omega_1 + \omega_2).$$

4. On pose

$$v = \frac{u}{2\omega_1}, \qquad \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

et

$$\vartheta_\alpha v = \theta_\alpha u \qquad \text{avec} \qquad \alpha = 0, 1, 2, 3.$$

l'indice zéro indiquant l'absence d'indice. Démontrer les formules

$$\left\{\begin{aligned} \vartheta(v+1) &= -\vartheta(v), \\ \vartheta_1(v+1) &= -\vartheta_1(v), \\ \vartheta_2(v+1) &= \vartheta_2(v), \\ \vartheta_3(v+1) &= \vartheta_3(v); \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \vartheta\left(v+\frac{1}{2}\right) &= \vartheta_1(v), \\ \vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}\right) &= -\vartheta(v), \\ \vartheta_2\left(v+\frac{1}{2}\right) &= \vartheta_3(v), \\ \vartheta_3\left(v+\frac{1}{2}\right) &= \vartheta_2(v), \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \vartheta(v+\tau) &= -\mathrm{A}\,\vartheta(v) \\ \vartheta_1(v+\tau) &= \mathrm{A}\,\vartheta_1(v) \\ \vartheta_2(v+\tau) &= \mathrm{A}\,\vartheta_2(v) \\ \vartheta_3(v+\tau) &= -\mathrm{A}\,\vartheta_3(v) \end{aligned}\right\} \qquad \mathrm{A} = q^{-1}e^{-2\pi i v},$$

$$\left\{\begin{aligned} \vartheta\left(v+\frac{\tau}{2}\right) &= i\mathrm{B}\,\vartheta_2(v) \\ \vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right) &= \mathrm{B}\,\vartheta_3(v) \\ \vartheta_2\left(v+\frac{\tau}{2}\right) &= \mathrm{B}\,\vartheta_1(v) \\ \vartheta_3\left(v+\frac{\tau}{2}\right) &= i\mathrm{B}\,\vartheta(v) \end{aligned}\right\} \qquad \mathrm{B} = q^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi v},$$

$$\vartheta'(0) = \pi\,\vartheta_1(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0),$$

$$\frac{\vartheta'''(0)}{\vartheta'(0)} = \frac{\vartheta_1''(0)}{\vartheta_1(0)} + \frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)} + \frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)},$$

$$\vartheta(2v\,|\,2\tau) = \frac{\vartheta(v)\,\vartheta_1(v)}{\vartheta_2(0\,|\,2\tau)};$$

la notation $\vartheta(2v\,|\,2\tau)$ indique que 2τ joue, vis-à-vis de cette fonction, le rôle de τ dans les ϑ ordinaires.

CHAPITRE III.

FONCTIONS σu, $\sigma_\alpha u$, ζu [FORMULES (20) A (40)].

Définitions; premières propriétés, zéros. — Les fonctions θ et θ_1, que nous avons étudiées dans le Chapitre II, sont éminemment propres aux applications : lorsque u et ω_1 sont réelles, elles admettent, les deux premières la période $4\omega_1$, les deux autres la période $2\omega_1$. Elles se comportent donc, à certains égards, comme des fonctions trigonométriques. Il est cependant commode, dans d'autres cas, d'avoir des fonctions qui, tout en conservant les principales propriétés des fonctions θ, contiennent les deux périodes d'une manière symétrique. Quoique la fonction σu (prononcez : *sigma u*) soit des quatre fonctions, qui vont être définies, la plus usitée, et, en réalité, celle dont nous ferons presque exclusivement usage, la symétrie des notations est telle que nous définirons d'un coup quatre des fonctions imaginées par Weierstrass. Nous poserons, A et B_α étant quatre constantes, ainsi que a,

$$(a) \qquad \begin{cases} \sigma u = A e^{au^2} \theta u, \\ \sigma_\alpha u = B_\alpha e^{au^2} \theta_\alpha u \qquad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (^1), \end{cases}$$

d'où il résulte immédiatement que les zéros des nouvelles fonctions sont les mêmes que ceux des θ correspondants, et que la

(1) Le lien des fonctions σ_α avec les fonctions θ_α est beaucoup trop intime pour ne pas définir ici ces fonctions: mais nous en ferons un usage bien moindre que la fonction fondamentale σu.

parité est aussi la même

$$(20)\quad \begin{cases} \text{Zéros de } \sigma u \ldots\ldots & 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2 \\ \quad\text{»}\quad \sigma_1 u \ldots\ldots & (2m_1+1)\omega_1 + 2m_2\omega_2 \\ \quad\text{»}\quad \sigma_2 u \ldots\ldots & 2m_1\omega_1 + (2m_2+1)\omega_2 \\ \quad\text{»}\quad \sigma_3 u \ldots\ldots & (2m_1+1)\omega_1 + (2m_2+1)\omega_2 \end{cases}$$

σu est impaire, les autres fonctions sont impaires, c'est-à-dire que

$$(21)\quad \begin{cases} \sigma(-u) = -\sigma u \\ \sigma_\alpha(-u) = \sigma_\alpha u \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Les constantes A et B_α sont déterminées par la condition que $\sigma_\alpha(0) = 1$ et $\sigma'(0) = 1$; or

$$\sigma'(0) = \lim_{u=0} \frac{\sigma u}{u} = \lim_{u=0} A e^{au^2} \frac{\theta u}{u} = A\,\theta'(0).$$

Donc

$$A = \frac{1}{\theta'(0)}.$$

De même

$$B_\alpha = \frac{1}{\theta_\alpha(0)}.$$

Si, par une raison de symétrie que nous allons justifier bientôt, on écrit $\frac{\eta_1}{2\omega_1}$ au lieu de a, les formules (a) qui définissent les fonctions σ et σ_α deviennent

$$(22)\quad \begin{cases} \sigma u = e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2} \dfrac{\theta u}{\theta' 0}, \\ \sigma_\alpha u = e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2} \dfrac{\theta_\alpha u}{\theta_\alpha 0}. \end{cases}$$

La constante η_1 est jusqu'ici arbitraire; on la détermine par la condition que la dérivée seconde du logarithme de σu, qui jouera le rôle principal dans les notations de Weierstrass adoptées par nous, n'ait pas de terme indépendant de u. Exprimons cette condition, et, pour cela, développons en série la fonction impaire σu, évidemment holomorphe comme θu :

$$\sigma u = u + A_3 u^3 + A_5 u^5 + \ldots.$$

On en tire

$$\sigma' u = 1 + 3A_3 u^2 + 5A_5 u^4 + \ldots,$$

$$\begin{aligned} D \log \sigma u = \frac{\sigma' u}{\sigma u} &= \frac{1 + 3A_3 u^2 + \ldots}{u + A_3 u^3 + \ldots} \\ &= \frac{1}{u}(1 + 3A_3 u^2 + \ldots)(1 + A_3 u^2 + \ldots)^{-1} \\ &= \frac{1}{u}(1 + 3A_3 u^2 + \ldots)(1 - A_3 u^2 + \ldots) \\ &= \frac{1}{u} + 2A_3 u + \ldots, \end{aligned}$$

$$D^2 \log \sigma u = -\frac{1}{u^2} + 2A_3 + B u^2 + C u^4 + \ldots.$$

La condition à exprimer est donc $A_3 = 0$. Il suffit pour cela de développer en série les deux facteurs qui composent σu

$$e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1} u^2} = 1 + \frac{\eta_1}{2\omega_1} u^2 + \ldots,$$

$$\theta u = u\,\theta'(0) + \frac{u^3}{6}\theta'''(0) + \ldots,$$

d'où

$$\sigma u = u + \left[\frac{\eta_1}{2\omega_1} + \frac{1}{6}\frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)}\right] u^3 + \ldots,$$

et la condition cherchée est

$$\eta_1 = -\frac{\omega_1}{3}\frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)}. \tag{23}$$

Remarque. — Il résulte des formules (22) et (23) que si ω_1 et q sont réelles, σu est aussi réelle pour toutes les valeurs de u.

Addition des périodes : la constante η_2. — Les formules maintenant se multiplient; mais, au fond, ce sont les formules relatives aux fonctions θ ou même à $\varphi(z)$ écrites avec les nouvelles notations. Ainsi, comme

$$e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}(u+2\omega_1)^2} = e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2}\, e^{2\eta_1(u+\omega_1)},$$

les formules (15) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} \sigma(u + 2\omega_1) &= -e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\sigma u, \\ \sigma_1(u + 2\omega_1) &= -e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\sigma_1 u, \\ \sigma_2(u + 2\omega_1) &= e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\sigma_2 u, \\ \sigma_3(u + 2\omega_1) &= e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\sigma_3 u. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

De même l'addition de la seconde période $2\omega_2$ donnera de nouvelles formules; occupons-nous seulement de σu; la substitution de $u + 2\omega_2$ à u dans la formule (22) donnera, en tenant compte de (16),

$$(b) \qquad \sigma(u + 2\omega_2) = -e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2} e^{\frac{2\eta_1}{\omega_1}(u+\omega_2)\omega_2 - \frac{\pi i}{\omega_1}(u+\omega_2)} \theta u.$$

Le coefficient de $u + \omega_2$ dans la seconde exponentielle sera $\frac{2\eta_1\omega_2}{\omega_1} - \frac{\pi i}{\omega_1}$; nous l'appellerons $2\eta_2$, d'où la formule très importante

$$(25) \qquad \eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{\pi i}{2}.$$

L'équation (b) s'écrit alors

$$\sigma(u + 2\omega_2) = -e^{2\eta_2(u+\omega_2)}\sigma u,$$

et le groupe des formules (16) se transforme dans le suivant

$$(26) \qquad \left\{\begin{aligned} \sigma(u + 2\omega_2) &= -e^{2\eta_2(u+\omega_2)}\sigma u, \\ \sigma_1(u + 2\omega_2) &= e^{2\eta_2(u+\omega_2)}\sigma_1 u, \\ \sigma_2(u + 2\omega_2) &= -e^{2\eta_2(u+\omega_2)}\sigma_2 u, \\ \sigma_3(u + 2\omega_2) &= e^{2\eta_2(u+\omega_2)}\sigma_3 u. \end{aligned}\right.$$

La constante η_3. — Nous avons déjà laissé pressentir (p. 17), l'utilité d'introduire une constante ω_3 telle que

$$(c) \qquad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0.$$

Par analogie, on introduit une constante η_3 telle que

$$(d) \qquad \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0.$$

En multipliant la formule (c) par η_2, la formule (d) par $-\omega_2$ et ajoutant, il vient

$$\omega_1\eta_2 - \eta_1\omega_2 + \omega_3\eta_2 - \omega_2\eta_3 = 0,$$

ou, en tenant compte de (25),

$$(27) \qquad \omega_3\eta_2 - \omega_2\eta_3 = \frac{\pi i}{2}.$$

On a de même

$$(28) \qquad \omega_1\eta_3 - \omega_3\eta_1 = \frac{\pi i}{2}.$$

Les formules (25), (27), (28) se déduisent de l'une d'elles par permutation circulaire des indices.

Addition de la troisième période. — La fonction à développer est $\sigma(u + 2\omega_3) = \sigma(u - 2\omega_1 - 2\omega_2)$. Nous procéderons en deux étapes : dans la première formule (24) remplaçons u par $u - 2\omega_1$ et tirons $\sigma(u - 2\omega_1)$,

$$\sigma(u - 2\omega_1) = -e^{-2\eta_1(u-\omega_1)}\sigma u;$$

d'où, en écrivant maintenant $u - 2\omega_2$ au lieu de u,

$$\sigma(u - 2\omega_2 - 2\omega_1) = \sigma(u + 2\omega_3) = -e^{-2\eta_1(u-2\omega_2-\omega_1)}\sigma(u - 2\omega_2).$$

La première formule (26) donnera

$$\sigma(u - 2\omega_2) = -e^{-2\eta_2(u-\omega_2)}\sigma u,$$

d'où

$$(e) \qquad \sigma(u + 2\omega_3) = e^{-2\eta_1(u-2\omega_2-\omega_1)-2\eta_2(u-\omega_2)}\sigma u.$$

L'exposant de e s'écrit

$$\begin{aligned} &2u(-\eta_1 - \eta_2) + 2\eta_1\omega_2 - 2\eta_1(-\omega_1 - \omega_2) + 2\eta_2\omega_2 \\ &= 2u\eta_3 - 2\omega_2\eta_3 - 2\eta_1\omega_3. \end{aligned}$$

Le dernier terme peut être remplacé, à cause de (28), par $\pi i - 2\omega_1\eta_3$: l'exposant est donc

$$2u\eta_3 - (2\omega_2 + 2\omega_1)\eta_3 + \pi i = 2\eta_3(u + \omega_3) + \pi i,$$

et la formule (e) devient

$$\sigma(u + 2\omega_3) = -e^{2\eta_3(u+\omega_3)}\sigma u.$$

On opérerait de même pour l'addition de la troisième période à $\sigma_\alpha u$; nous pouvons donc écrire le Tableau suivant qui renferme

les nouvelles formules réunies aux formules (24) et (26)

$$(29)\quad \begin{cases} \sigma\,(u+2\omega_i) = -\,e^{2\eta_i(u+\omega_i)}\,\sigma\,u & (i=1,2,3), \\ \sigma_\alpha(u+2\omega_\alpha) = -\,e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\,\sigma_\alpha u & (\alpha=1,2,3), \\ \sigma_\alpha(u+2\omega_\beta) = \quad e^{2\eta_\beta(u+\omega_\beta)}\,\sigma_\alpha u & (\alpha,\beta=1,2,3,\alpha\gtrless\beta). \end{cases}$$

Addition des demi-périodes. — La première formule (17), traduite dans les nouvelles notations, s'écrit

$$(f)\qquad \theta'(0)\,e^{-\frac{\eta_1}{2\omega_1}(u+\omega_1)^2}\sigma(u+\omega_1) = \theta_1(0)\,e^{-\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2}\sigma_1 u,$$

et cette même formule (17) donne

$$\theta_1(0) = \theta\omega_1;$$

de la première équation (22) on tire

$$\theta\omega_1 = \sigma\omega_1\theta'0\,e^{-\frac{\eta_1\omega_1}{2}}.$$

L'égalité (f) peut donc s'écrire

$$e^{-\frac{\eta_1}{2\omega_1}(u+\omega_1)^2}\sigma(u+\omega_1) = \sigma\omega_1\,e^{-\frac{\eta_1}{2\omega_1}(u^2+\omega_1^2)}\sigma_1 u,$$

ou, en simplifiant,

$$\sigma(u+\omega_1) = e^{\eta_1 u}\,\sigma\omega_1\,\sigma_1 u.$$

La même méthode s'appliquera évidemment à l'addition des deux autres demi-périodes et nous pouvons écrire la formule qui en comprend trois

$$(30)\qquad \sigma(u+\omega_\alpha) = e^{\eta_\alpha u}\,\sigma\omega_\alpha\,\sigma_\alpha u \qquad (\alpha=1,2,3).$$

On obtiendrait des formules analogues relatives à l'addition des demi-périodes aux fonctions $\sigma_\alpha u$.

Théorème. — *La fonction σu vérifie la même équation à trois termes que la fonction θu.*

Soit $\varphi(u)$ une fonction quelconque vérifiant l'équation (7); la fonction $e^{\alpha u^2+\gamma}\varphi(u) = \psi(u)$ vérifiera la même équation. En effet

$$\psi(b-c) = e^{\alpha(b-c)^2}\,e^{\gamma}\,\varphi(b-c),$$

le premier terme de l'équation à trois termes est donc

$$e^{4\gamma}\, e^{2\alpha(a^2+b^2+c^2+d^2)}\, \varphi(b-c)\,\varphi(b+c)\,\varphi(a-d)\,\varphi(a+d).$$

Les trois termes étant multipliés par le même facteur, le théorème est démontré et l'on a

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sigma(b-c)\,\sigma(b+c)\,\sigma(a-d)\,\sigma(a+d)\\ &+\sigma(c-a)\,\sigma(c+a)\,\sigma(b-d)\,\sigma(b+d)\\ &+\sigma(a-b)\,\sigma(a+b)\,\sigma(c-d)\,\sigma(c+d)=0.\end{aligned}\right.$$

Remarque. — *Toute fonction qui vérifie l'équation à trois termes est nécessairement impaire, si elle s'annule en même temps que la variable.*

Faisons, en effet, dans l'équation (7),

$$b=c;$$

elle devient

$$\begin{aligned}&\varphi(c-a)\,\varphi(c+a)\,\varphi(c-d)\,\varphi(c+d)\\ &\quad+\varphi(a-c)\,\varphi(a+c)\,\varphi(c-d)\,\varphi(c+d)=0,\end{aligned}$$

ou

$$\varphi(c-d)\,\varphi(c+d)\,\varphi(c+a)[\varphi(c-a)+\varphi(a-c)]=0,$$

ou

$$\varphi(c-a)+\varphi(a-c)=0,$$

ou, si l'on pose $a-c=u$,

$$\varphi(-u)=-\varphi(u).$$

Formule d'addition de la fonction σu. — Cette formule se déduit de l'équation à trois termes; elle conviendra à toute fonction, s'il en existe d'autres, vérifiant cette équation et telle que sa dérivée prenne la valeur 1, lorsque la variable s'annule.

Égalons $b-c$ à un infiniment petit ε : l'équation (31) devient, en remarquant que $\sigma\varepsilon=\varepsilon\sigma'(0)=\varepsilon$,

$$\begin{aligned}&\varepsilon\,\sigma(2c+\varepsilon)\,\sigma(a-d)\,\sigma(a+d)\\ &\quad+\sigma(c-a)\,\sigma(c+a)\,\sigma(c-d+\varepsilon)\,\sigma(c+d+\varepsilon)\\ &\quad+\sigma(a-c-\varepsilon)\,\sigma(a+c+\varepsilon)\,\sigma(c-d)\,\sigma(c+d)=0.\end{aligned}$$

En développant suivant la formule de Taylor et conservant seulement les termes infiniment petits du premier ordre, nous avons

l'égalité

$$\begin{aligned}&\sigma 2c\,\sigma(a-d)\,\sigma(a+d)\\&\quad+\sigma(c-a)\,\sigma(c+a)\,[\sigma(c+d)\,\sigma'(c-d)+\sigma(c-d)\,\sigma'(c+d)]\\&\quad+\sigma(c-d)\,\sigma(c+d)\,[\sigma(a-c)\,\sigma'(a+c)-\sigma(a+c)\,\sigma'(a-c)]=0.\end{aligned}$$

Cette équation peut s'écrire

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma(a-d)\,\sigma(a+d)}{\sigma(a-c)\,\sigma(a+c)\,\sigma(c-d)\,\sigma(c+d)}\\&\quad=\frac{1}{\sigma 2c}\left[\frac{\sigma'(c-d)}{\sigma(c-d)}+\frac{\sigma'(c+d)}{\sigma(c+d)}-\frac{\sigma'(a+c)}{\sigma(a+c)}+\frac{\sigma'(a-c)}{\sigma(a-c)}\right].\end{aligned}$$

Si l'on fait tendre c vers zéro, le second membre est indéterminé; mais, en appliquant la règle de L'Hôpital, on a immédiatement

$$\lim_{c=0}\frac{\dfrac{\sigma'(d+c)}{\sigma(d+c)}-\dfrac{\sigma'(d-c)}{\sigma(d-c)}}{\sigma 2c}=\mathrm{D}\,\frac{\sigma' d}{\sigma d}=\mathrm{D}_2\log\sigma d.$$

le signe D_2 indiquant une dérivée seconde. De même

$$\lim_{c=0}\frac{\dfrac{\sigma'(a+c)}{\sigma(a+c)}-\dfrac{\sigma'(a-c)}{\sigma(a-c)}}{\sigma 2c}=\mathrm{D}_2\log\sigma a.$$

Donc enfin

$$\frac{\sigma(a-d)\,\sigma(a+d)}{\sigma^2 a\,\sigma^2 d}=\mathrm{D}_2\log\sigma a-\mathrm{D}_2\log\sigma d=\mathrm{A}-\mathrm{D},$$

en désignant par X la fonction $\mathrm{D}_2\log\sigma x$. Changeons de notations nous écrirons

$$(32)\qquad \frac{\sigma(u-v)\,\sigma(u+v)}{\sigma^2 u.\,\sigma^2 v}=\mathrm{D}_2\log\sigma u-\mathrm{D}^2\log\sigma v.$$

C'est cette formule qu'on appelle *formule d'addition* de la fonction σu. En réalité, elle ne remplit pas absolument le rôle d'une formule d'addition, puisqu'elle ne permet pas de calculer $\sigma(u+v)$, connaissant σu et σv.

Remarque. — En remplaçant u successivement par a, b, c et v par d, on pourra déduire de l'équation (32) l'équation à trois

termes si l'on s'appuie sur l'identité évidente

$$(A-B)(C-D)+(B-C)(A-D)+(C-A)(B-D)=0.$$

DE LA FONCTION ζu.

La nouvelle fonction, proposée également par Weierstrass, est définie par l'égalité

$$\zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u} = D \log \sigma u. \tag{33}$$

On prononce *dzêta u*.

Il en résulte, à cause de (22),

$$\zeta u = \frac{\eta_1}{\omega_1} u + \frac{\theta' u}{\theta u}. \tag{34}$$

Addition des périodes. — La définition (33) nous donne immédiatement

$$\zeta(u+2\omega_i) = \frac{\sigma'(u+2\omega_i)}{\sigma(u+2\omega_i)} \qquad (i=1, 2, 3),$$

et par suite, en appliquant la première équation (29),

$$\zeta(u+2\omega_i) = \zeta u + 2\eta_i \qquad (i=1, 2, 3). \tag{35}$$

Remarque. — On pourrait, par un procédé analogue, des fonctions $\sigma_\alpha u$ déduire des fonctions $\zeta_\alpha u$; mais ces fonctions sont peu usitées.

Autres propriétés de ζu. — σu est impaire, $\sigma' u$ est paire, donc ζu est une fonction impaire :

$$\zeta(-u) = -\zeta u. \tag{37}$$

Nous avons vu (p. 30), que

$$\zeta u = D \log \sigma u = \frac{1}{u} + 2A_3 u + B u^3 + \ldots,$$

et nous avons annulé A_3; donc

$$\zeta u = \frac{1}{u} + B u^3 + C u^5 + \ldots. \tag{38}$$

L'origine est un pôle simple de ζu. D'ailleurs, les pôles de ζu sont les zéros de σu; ils sont donnés par la formule

$$u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2.$$

Formule d'addition de ζu. — L'équation (32) peut s'écrire

$$\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v} = \zeta' u - \zeta' v.$$

Prenons les dérivées logarithmiques des deux membres, nous obtenons

$$(39)\qquad \zeta(u-v) + \zeta(u+v) - 2\zeta u = \frac{\zeta'' u}{\zeta' u - \zeta' v}.$$

Échangeons les lettres u et v, l'équation précédente devient

$$(39\,bis)\qquad -\zeta(u-v) + \zeta(u+v) - 2\zeta v = \frac{-\zeta'' v}{\zeta' u - \zeta' v};$$

d'où, par addition avec (39),

$$(40)\qquad \zeta(u+v) = \zeta u + \zeta v + \frac{1}{2}\frac{\zeta'' u - \zeta'' v}{\zeta' u - \zeta' v}.$$

C'est la formule d'addition des fonctions ζu.

Remarque importante. — Pour montrer l'avantage des nouvelles fonctions, nous signalerons, sans la démontrer, la proposition suivante : Si l'on remplace ω_1 et ω_2 par deux nouvelles périodes ω et ω' telles que

$$\omega = a\omega_1 + b\omega_2,$$
$$\omega' = c\,\omega_1 + d\omega_2,$$

avec

$$ad - bc = \pm 1,$$

la fonction σu et la fonction ζu ne sont pas modifiées. Il en sera de même de la fonction $\wp u$ que nous définirons au Chapitre suivant.

Les fonctions $\sigma_\alpha u$ s'échangent les unes dans les autres; il en résulte que les fonctions θ s'échangent avec multiplication par des exponentielles.

Exercices sur le Chapitre III.

1. Démontrer la deuxième et la troisième formule (29).

2. Démontrer que

$$\sigma(u+\omega_2) = e^{\eta_2 u}\,\sigma\omega_2\,\sigma_2 u.$$

3. Calculer $\sigma_\alpha(u+\omega_\alpha)$ et $\sigma_\alpha(u+\omega_\beta)$; on trouve

$$\sigma_\alpha(u+\omega_\alpha) = -\,e^{\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\,\frac{\sigma u}{\sigma\omega_\alpha},$$

$$\sigma_\alpha(u+\omega_\beta) = e^{\eta_\beta u}\,\sigma_\alpha\omega_\beta\,\sigma_\gamma u.$$

4 Démontrer la formule

$$\sigma(u+a)\,\sigma(u-a) = \sigma^2 u\,\sigma_\alpha^2 a - \sigma_\alpha^2 u\,\sigma^2 a.$$

CHAPITRE IV.

DES FONCTIONS ELLIPTIQUES. DÉFINITIONS DE pu, $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$: PÉRIODES, FORMULES D'ADDITION, VARIATION [FORMULES (41) A (69)].

On appelle *fonctions elliptiques* toutes les fonctions doublement périodiques qui sont finies et continues, ainsi que leurs dérivées, en tous les points du plan, sauf en certains points où elles deviennent infinies, mais de manière que leur produit, par une puissance convenable de la variable, reste fini.

Premier point de vue : la fonction pu; premières propriétés. — On obtient très simplement des fonctions elliptiques en prenant la dérivée seconde du logarithme d'une fonction elliptique de troisième espèce. C'est ainsi qu'on obtient, en particulier, la fonction appelée pu (prononcez *pé u*), qui jouera le rôle le plus important dans la suite de ce précis. Il suffit de poser

$$(41) \qquad pu = -\zeta' u = -D_2 \log \sigma u = \frac{\theta'^2 u - \theta u \theta'' u}{\theta^2 u} - \frac{\eta_1}{\omega_1} u.$$

On aura, en effet, en vertu de la formule (36),

$$(42) \qquad p(u + 2\omega_i) = -\zeta'(u + 2\omega_i) = -\zeta' u = pu.$$

La fonction pu admet donc les périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, et, par suite,

$$2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2,$$

m_1, m_2 étant deux nombres entiers quelconques positifs ou négatifs; remarquons, en particulier, la période $-2\omega_1 - 2\omega_2$ qui est égale à $2\omega_3$.

La fonction pu est une fonction *paire* et son développement en série, déduit de la formule (38), se présente comme il suit

$$(43) \qquad pu = \frac{1}{u^2} + c_2 u^2 + c_4 u^4 + \ldots.$$

L'origine est un pôle double, et, par conséquent, tous les points du plan définis par les valeurs

$$u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$$

sont des pôles doubles. Il n'y en a, d'ailleurs, pas d'autres, comme le montre l'expression déduite de (41) en fonctions des séries θ.

Nous retrouverons plus loin cette fonction pu, en nous plaçant à un autre point de vue; mais nous remarquerons immédiatement que, dans l'hypothèse déjà souvent faite, où ω_1 et $\frac{\omega_2}{i}$ sont réelles, il y a une infinité de périodes réelles $2m_1\omega_1$. Il en est encore de même si ω_1 et ω_2 sont imaginaires conjuguées; car la période $2\omega_1 + 2\omega_2$ et ses multiples sont alors réelles.

Racines de la dérivée $p'u$. — De la relation (42) on déduit

$$p'(u + 2\omega_i) = p'u.$$

Faisons dans cette relation $u = -\omega_i$; il vient

$$p'\omega_i = p'(-\omega_i).$$

Or $p'u$ est une fonction impaire (dérivée d'une fonction paire); donc

$$p'(-\omega_i) = -p'\omega_i$$

et

$$p'\omega_i = -p'\omega_i = 0.$$

Nous connaissons ainsi trois racines de $p'u$, savoir ω_1, ω_2, ω_3. Nous admettrons, sans démonstration, qu'il n'y en a pas d'autres, si l'on fait abstraction des multiples des périodes.

Rappel de formules. — L'introduction de la fonction pu

permet d'écrire comme il suit les formules (32), (39) et (40)

$$(32') \qquad -\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v} = pu - pv,$$

$$(39') \qquad \begin{cases} \zeta(u-v)+\zeta(u+v)-2\zeta u = \dfrac{p'u}{pu-pv}, \\ \zeta(u+v)-\zeta(u-v)-2\zeta v = -\dfrac{p'v}{pu-pv}, \end{cases}$$

$$(40') \qquad \zeta(u+v) = \zeta u + \zeta v + \frac{1}{2}\,\frac{p'u-p'v}{pu-pv}.$$

Deuxième point de vue : définition et périodicité de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$. — On obtient encore, comme nous l'avons dit au Chapitre II, des fonctions elliptiques en faisant le quotient de deux fonctions elliptiques de troisième espèce, qui ont les mêmes périodes et le même multiplicateur : en effet, soient deux fonctions $\varphi(u)$ et $\psi(u)$, telles que

$$\begin{cases} \varphi(u+a) = e^{cu+d}\,\varphi(u), \\ \varphi(u+b) = e^{c'u+d'}\,\varphi(u); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi(u+a) = e^{cu+d}\,\psi(u), \\ \psi(u+b) = e^{c'u+d'}\,\psi(u); \end{cases}$$

la fonction $\dfrac{\varphi(u)}{\psi(u)}$ présentera évidemment les deux périodes a et b. Dans les notations très ingénieuses de Weierstrass, les fonctions elliptiques, obtenues par ce moyen, sont des quotients de fonctions σ, désignés par un double indice qui rappelle les indices des deux fonctions employées; ainsi

$$(44) \qquad \sigma_{\alpha\beta} u = \frac{\sigma_\alpha u}{\sigma_\beta u}$$

avec la convention supplémentaire que $\sigma_0 u = \sigma u$.

Ces fonctions peuvent être substituées aux fonctions de Jacobi dont nous allons maintenant parler; mais ces dernières, outre leur intérêt historique, offrent le grand avantage de ne dépendre au fond que d'un seul paramètre, et, par suite, de se rattacher immédiatement aux Tables numériques de Legendre; elles sont donc à préférer dans les applications numériques.

Dans ce qui suit, nous désignerons les fonctions par la notation de Gudermann, aujourd'hui universellement adoptée. Si la définition paraît compliquée à première vue, les propriétés caractéristiques que nous substituerons à cette définition seront simples, et l'on peut immédiatement dire que les multiplicateurs qui vont être introduits ont pour objet de faire dépendre les nouvelles fonctions du seul rapport $\frac{\omega_1}{\omega_2}$, ou, ce qui revient au même, de q.

Posons

$$\lambda = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \theta_2^4(0), \tag{45}$$

ou mieux

$$g = \sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2\omega_1}\,\theta_3^2(0), \tag{45 bis}$$

les fonctions de Jacobi sont définies par les égalités

$$\left\{\begin{aligned}
\operatorname{sn} u &= g\,\frac{\theta\left(\frac{u}{g}\right)}{\theta_2\left(\frac{u}{g}\right)}\,\frac{\theta_2(0)}{\theta'(0)} = g\,\frac{\sigma\left(\frac{u}{g}\right)}{\sigma_2\left(\frac{u}{g}\right)},\\
\operatorname{cn} u &= \frac{\theta_1\left(\frac{u}{g}\right)}{\theta_2\left(\frac{u}{g}\right)}\,\frac{\theta_2(0)}{\theta_1(0)} = \frac{\sigma_1\left(\frac{u}{g}\right)}{\sigma_2\left(\frac{u}{g}\right)},\\
\operatorname{dn} u &= \frac{\theta_3\left(\frac{u}{g}\right)}{\theta_2\left(\frac{u}{g}\right)}\,\frac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)} = \frac{\sigma_3\left(\frac{u}{g}\right)}{\sigma_2\left(\frac{u}{g}\right)}.
\end{aligned}\right. \tag{46}$$

On prononce s, n, u; c, n, u; d, n, u [1]. L'exposant de e, dans les séries qui définissent les θ, est donc $\frac{2ui}{\theta_3^2(0)}$; dans $\operatorname{sn} u$ le facteur g contient ω_1, de manière à faire disparaître le facteur ω_1 qui sera introduit par la dérivée $\theta'(0)$. Les fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ sont donc, par rapport aux périodes ω_1 et ω_2, homogènes et de degré zéro. Par suite des propriétés des θ, on voit que $\operatorname{sn} u$ est impaire,

---

[1] Legendre et, après lui, Jacobi employaient les notations $\sin\operatorname{am} u = \operatorname{sn} u$, $\cos\operatorname{am} u = \operatorname{cn} u$, $\Delta\operatorname{am} u = \operatorname{dn} u$, qu'on énonce *sinus amplitude u*, *cosinus amplitude u*, *delta amplitude u* : la fonction $\varphi = \operatorname{am} u$ (*amplitude u*) se trouve définie par les égalités précédentes, puisque $\sin\varphi = \operatorname{sn} u$.

$\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ sont paires, et l'on a

$$(47)\qquad \operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn} u, \qquad \operatorname{cn}(-u) = \operatorname{cn} u, \qquad \operatorname{dn}(-u) = \operatorname{dn} u.$$

Pour que les arguments des fonctions θ qui figurent dans les formules (46) augmentent de périodes, il faut que u augmente de périodes, multipliées par $\sqrt{\lambda}$. On est ainsi conduit à poser

$$(48)\qquad \begin{cases} \omega_1\sqrt{\lambda} - K = \dfrac{\pi}{2}\,\theta_3^2(0), \\[2ex] \omega_2\sqrt{\lambda} = iK' = \dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\,\theta_3^2(0). \end{cases}$$

Remarque essentielle. — K et K′ ne dépendent que du rapport des périodes et, par suite, sont fonctions l'une de l'autre. Elles sont réelles en même temps que ω_1 et $\dfrac{\omega_2}{i}$.

Périodicité. — Les formules (15) et (16) nous donnent les nouvelles relations

$$(49)\qquad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+2K) = -\operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(u+2K) = -\operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(u+2K) = \operatorname{dn} u. \end{cases}$$

$$(50)\qquad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+2iK') = \operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(u+2iK') = -\operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(u+2iK') = -\operatorname{dn} u. \end{cases}$$

Il en résulte que les périodes sont

$$(51)\qquad \begin{cases} \text{Pour sn.....} & 4K \text{ et } 2iK' \\ \text{Pour cn.....} & 4K \text{ et } 2K+2iK' \\ \text{Pour dn.....} & 2K \text{ et } 4iK' \end{cases}$$

Zéros et pôles. — Les zéros et les pôles résultent immédiatement de la définition (46); il suffit d'en écrire le Tableau, en se guidant sur les formules (19) :

$$(52)\qquad \begin{cases} \text{Pôles des trois fonctions.} & 2mK + (2m'+1)iK' \\ \text{Zéros de } \operatorname{sn} u\text{.....} & 2mK + 2m'iK' \\ \text{Zéros de } \operatorname{cn} u\text{.....} & (2m+1)K + 2m'iK' \\ \text{Zéros de } \operatorname{dn} u\text{.....} & (2m+1)K + (2m'+1)iK' \end{cases}$$

Tous ces zéros sont simples : il en est de même des pôles.

Relations fondamentales. — Des équations (46) tirons $\theta_1 \frac{u}{\sqrt{\lambda}}$, $\theta_2 \frac{u}{\sqrt{\lambda}}$, $\theta_3 \frac{u}{\sqrt{\lambda}}$, et portons-les dans la première et la troisième équation (n) du Chapitre II [1]; nous obtenons deux formules; voici le calcul pour la première. Supprimons immédiatement le facteur $\theta_2^2 \frac{u}{\sqrt{\lambda}}$:

$$\frac{\theta'^2(0)}{\lambda\theta_2^2(0)} \operatorname{sn}^2 u = k - k' \frac{\theta_1^2(0)}{\theta_2^2(0)} \operatorname{cn}^2 u.$$

Remplaçons λ par sa valeur, que définit l'équation (45), k et k' par celles que définissent les formules (m) du Chapitre II,

$$\frac{\theta'^2(0)}{\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \theta_3^4(0)\theta_2^2(0)} \operatorname{sn}^2 u = \frac{\theta_1^2(0)}{\theta_3^2(0)} - \frac{\theta_1^2(0)}{\theta_3^2(0)} \operatorname{cn}^2 u.$$

Il n'y a plus qu'à remplacer $\theta'(0)$ par sa valeur tirée de l'identité (s), qui termine le Chapitre II, pour obtenir la première des deux formules suivantes :

$$(53) \qquad \begin{cases} \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \\ k^2 \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{dn}^2 u = 1. \end{cases}$$

Première formule d'addition de pu. — Nous allons maintenant plus spécialement étudier la fonction pu. Reproduisons la formule (40'), établie page 41,

$$(40') \qquad \zeta(u+v) = \zeta u + \zeta v + \frac{1}{2} \frac{p'u - p'v}{pu - pv},$$

et prenons la dérivée des deux membres : nous aurons la première *formule d'addition relative à pu*

$$(54) \qquad p(u+v) = pu - \frac{1}{2} \frac{d}{du} \frac{p'u - p'v}{pu - pv}.$$

Cette formule, dissymétrique par rapport aux lettres u et v,

---

[1] Nous utilisons ici des formules démontrées seulement dans le texte en petits caractères; on trouvera plus loin une autre démonstration indépendante de celle-ci, mais nous n'avons pas cru devoir attendre aussi longtemps pour faire connaître les importantes formules (53).

sera bientôt remplacée par une autre (page 49); mais nous avons besoin d'établir d'abord une équation différentielle à laquelle satisfait pu et qui joue un rôle fondamental dans la théorie.

Équation différentielle de pu. — L'équation (54) donne immédiatement, en échangeant u et v,

$$2pu - \frac{\partial}{\partial u}\frac{p'u - p'v}{pu - pv} = 2pv - \frac{\partial}{\partial v}\frac{p'u - p'v}{pu - pv}$$

ou

$$2pu - \frac{\partial}{\partial u}\frac{p'u}{pu - pv} = 2pv + \frac{\partial}{\partial v}\frac{p'v}{pu - pv}.$$

Posons

$$pu = z,$$

d'où

$$p'u\,du = dz;$$

il vient

$$2z - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{z - pv} = 2pv + \frac{p''v}{z - pv} + \frac{p'^2 v}{(z - pv)^2},$$

ce qu'on peut écrire

$$2 - \frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{z - pv}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{z - pv} = \frac{p''v}{(z - pv)^2} + \frac{p'^2 v}{(z - pv)^3}.$$

Intégrons, et désignons par a une constante; nous parvenons à l'équation

$$2(z + a) - \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{z - pv}\right)^2 = -\frac{p''v}{z - pv} - \frac{1}{2}\frac{p'^2 v}{2(z - pv)^2},$$

qu'on peut ordonner ainsi

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = 4(z + a)(z - pv)^2 + 2p''v(z - pv) + p'^2 v.$$

v étant une constante arbitraire, on voit déjà que $p'u$ est exprimable par un polynome du troisième degré en pu. Mais on peut aller plus loin; nous avons, en effet, vu (43) que

$$pu = \frac{1}{u^2} + c_2 u^2 + c_4 u^4 + \ldots.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
p^2 u &= \frac{1}{u^4} + 2c_2 + 2c_4 u^2 + \ldots, \\
p^3 u &= \frac{1}{u^6} + 3\frac{c_2}{u^2} + 3c_4 + \ldots, \\
p' u &= -\frac{2}{u^3} + 2c_2 u + 4c_4 u^3 + \ldots, \\
p'^2 u &= \frac{4}{u^6} + \frac{8c^2}{u^2} + 16c_4 + \ldots.
\end{aligned}$$

$p'^2 u$ ne renfermant pas de terme de la forme $\frac{1}{u^4}$, il ne pourra pas y avoir dans le second membre de terme en $p^2 u$, et l'équation entre pu et sa dérivée sera finalement de la forme

$$(55) \qquad p'^2 u = 4p^3 u - g_2 p u - g_3.$$

g_2 et g_3 sont des constantes qui ont reçu le nom d'*invariants* de la fonction pu; leurs valeurs sont

$$g_2 = 4c_2 \qquad \text{et} \qquad g_3 = -4c_4,$$

réelles si ω_1 et $\frac{\omega_2}{i}$ sont réelles et de même signe; elles ne dépendent que des périodes.

Soient e_1, e_2, e_3 les racines de l'équation

$$4z^3 - g_2 z - g_3 = 0;$$

l'équation précédente peut s'écrire

$$(55\,bis) \qquad p'^2 u = 4(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3).$$

Corollaire I. — D'après cette équation, les racines de la dérivée s'obtiendront en annulant un des trois facteurs du second membre; or on a vu (page 40) que ces racines étaient ω_1, ω_2, ω_3. On aura donc, en faisant correspondre provisoirement les indices,

$$(56) \qquad e_1 = p\omega_1, \qquad e_2 = p\omega_2, \qquad e_3 = p\omega_3$$

ou, plus généralement, en désignant par ω_j une demi-période quelconque,

$$(56\,bis) \qquad e_i = p\omega_j \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Remarque. — On voit aussi que ω_1, ω_2, ω_3, annulant la dérivée, sont des zéros doubles pour l'équation

$$pu - e_\alpha = 0;$$

nous montrerons bientôt que ces facteurs $pu - e_\alpha$ sont effectivement des carrés parfaits.

Corollaire II. — On déduit de l'équation (55), par une dérivation,

$$(a) \qquad 2p''u = 12p^2u - g_2.$$

Toutes les dérivées d'ordre pair s'exprimeront donc en fonction de pu et de ses puissances, toutes les dérivées d'ordre impair par des expressions analogues multipliées par $p'u$.

Problème inverse. Expression des puissances de pu en fonctions linéaires de pu et de ses dérivées. — La formule précédente et celles qu'on en déduit par des dérivations successives permettent inversement d'obtenir les différentes puissances de pu en fonctions linéaires des dérivées et, par conséquent, de calculer les intégrales de la forme $\int p^m u\,du$. Ainsi, en dérivant deux fois de suite la formule (a) écrite comme il suit

$$4p^2u = \frac{2}{3}p''u + \frac{1}{3}g_2,$$

on obtient, en supprimant dans l'écriture la lettre u,

$$(b) \qquad \left\{\begin{aligned} 4pp' &= \frac{1}{3}p''', \\ 4p'^2 + 4pp'' &= \frac{1}{3}p^{\text{IV}}. \end{aligned}\right.$$

D'autre part, on a (55)

$$(c) \qquad p'^2 = 4p^3 - g_2p - g_3.$$

Il ne reste qu'à éliminer p'^2 et pp'' entre (a), (b) et (c) pour avoir p^3; récrivons la formule (a) ainsi

$$(a) \qquad 2pp'' = 12p^3 - g^2p.$$

D'abord pp'' entre (a) et (b)

$$8p^3 + \frac{4}{3}p'^2 = \frac{2}{3}g_2 p + \frac{1}{9}p^{\text{IV}},$$

puis, à cause de (c),

$$\left(8 + \frac{16}{3}\right)p^2 = 2g_2 p + \frac{4}{3}g_3 + \frac{1}{9}p^{\text{IV}};$$

d'où

$$(d) \qquad p^3 = \frac{3}{20}g_2 p + \frac{1}{10}g_3 + \frac{1}{120}p^{\text{IV}}$$

et

$$(e) \qquad p'^2 = -\frac{2}{5}g_2 p - \frac{3}{5}g_2 + \frac{1}{30}p^{\text{IV}}.$$

De même, en différentiant deux fois la formule (d), nous introduirons p^4 par la substitution de $4p^3 - g_2 p = g_3$ à p'^2,

$$3p^2 p' = \frac{3}{20}g_2 p' + \frac{1}{120}p^{\text{V}},$$

$$3p^2 p'' + 6pp'^2 = \frac{3}{20}g_2 p'' + \frac{1}{120}p^{\text{VI}};$$

d'où, en tenant compte de (a) et de (c),

$$(f) \quad \left\{ \begin{aligned} & 3p^2\left(6p^2 u - \frac{1}{2}g_2\right) + 6p(4p^3 - g_2 p - g_3) = \frac{3}{20}g_2 p'' + \frac{1}{120}p^{\text{VI}}, \\ & 42p^4 u = \frac{15}{2}\left(\frac{2}{12}p'' + \frac{1}{12}g_2\right)g_2 + 6g_3 p + \frac{3}{20}g_2 p'' + \frac{1}{120}p^{\text{IV}} \\ & 42p^4 u = \frac{5}{8}g_2^2 + 6g_3 p + \frac{14}{10}g_2 p'' + \frac{1}{120}p^{\text{VI}}, \end{aligned} \right.$$

et ainsi de suite.

Définition d'une notation. — Une équation différentielle telle que (55) ou (55 *bis*) pouvant servir à définir la fonction pu, si l'on choisit parmi les intégrales de l'équation celle qui est infinie pour $u = 0$, on conçoit souvent pu comme ainsi définie, ce qu'on rappelle en écrivant $p(u; g_2, g_3)$ ou $p(u; e_1, e_2, e_3)$. Lorsque nous voudrons rappeler que pu est définie par ses périodes, nous écrirons $p(u; \omega_1, \omega_2)$.

Deuxième formule d'addition des pu. — Nous pouvons maintenant établir la formule d'addition symétrique que nous avons annoncée page 45. Nous étions parvenus à l'égalité

$$p(u+v)-pu=-\frac{1}{2}\frac{d}{du}\frac{p'u-p'v}{pu-pv}$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{p''u}{pu-pv}+\frac{1}{2}\frac{(p'u-p'v)p'u}{(pu-pv)^2}.$$

Changeons u en v et v en u : l'égalité nouvelle

$$p(u+v)-pv=+\frac{1}{2}\frac{p''v}{pu-pv}-\frac{1}{2}\frac{(p'u-p'v)p'v}{(pu-pv)^2},$$

ajoutée membre à membre à la précédente, nous donne

$$2p(u+v)-pu-pv=\frac{1}{2}\frac{p''v-p''u}{pu-pv}+\frac{1}{2}\frac{(p'u-p'v)^2}{(pu-pv)^2}.$$

Or, à cause de la relation (a),

$$p''v-p''u=6(p^2v-p^2u)=-6(pu-pv)(pu+pv).$$

Donc enfin, après simplifications,

$$(57)\qquad p(u+v)+pu+pv=\frac{1}{4}\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2.$$

Telle est la formule que nous avions en vue.

THÉORÈME. — *Les fonctions $\sqrt{pu-e_\alpha}$ sont uniformes.*

Nous allons maintenant justifier la remarque de la page 47 en donnant la valeur effective de $\sqrt{pu-e_\alpha}$. Dans la formule (32), posons $v=\omega_\alpha$; elle devient, en tenant compte de ce que $pu=-D_2\log\sigma u$,

$$pu-e_\alpha=-\frac{\sigma(u+\omega_\alpha)\sigma(u-\omega_\alpha)}{\sigma^2 u\,\sigma^2\omega_\alpha}.$$

Mais, à cause de la formule (29),

$$\sigma(u-\omega_\alpha)=\sigma(u+\omega_\alpha-2\omega_\alpha)=-e^{-2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha-\omega_\alpha)}\sigma(u+\omega_\alpha);$$

donc

$$(g)\qquad pu-e_\alpha=\frac{e^{-2\eta_\alpha u}\,\sigma^2(u+\omega_\alpha)}{\sigma^2 u\,\sigma^2\omega_\alpha}.$$

Le second membre est un carré parfait; nous pourrons en extraire la racine, et, si nous nous reportons aux formules (30) et (22), nous pourrons écrire la série d'égalités suivantes que nous grouperons sous un même numéro :

$$(58)\qquad \sqrt{pu - e_\alpha} = \frac{e^{-\eta_\alpha u}\,\sigma(u+\omega_\alpha)}{\sigma u\,\sigma\omega_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u} = \frac{\theta_\alpha u}{\theta u}\,\frac{\theta'(0)}{\theta_\alpha(0)}.$$

Le théorème est donc démontré. On voit que le signe de $\sqrt{pu - e_\alpha}$ une fois choisi ne redeviendra pas indéterminé, le second membre étant une fonction monodrome de u; la détermination à prendre sera celle qui donnera au premier membre, pour u infiniment petit, la même valeur principale $\frac{1}{u}$ qu'au second.

Remarque. — Il résulte de la formule (58) que, si les constantes ω_1 et $\frac{\omega_2}{i}$ sont réelles et de même signe, pu reste supérieure à la plus grande des racines e_1, e_2, e_3.

Corollaire. — Dans la formule (g), écrivons $u + \omega_\alpha$ au lieu de u; nous obtenons l'équation

$$p(u+\omega_\alpha) - e_\alpha = \frac{e^{-2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\,\sigma^2(u+2\omega_\alpha)}{\sigma^2(u+\omega_\alpha)\,\sigma^2\omega_\alpha},$$

qui, à cause de (29), peut s'écrire

$$(h)\qquad p(u+\omega_\alpha) - e_\alpha = \frac{e^{-2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\,\sigma^2 u\, e^{4\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}}{\sigma^2(u+\omega_\alpha)\,\sigma^2\omega_\alpha}.$$

En multipliant (g) et (h), membre à membre, on obtient

$$(k)\qquad (pu - e_\alpha)\,[p(u+\omega_\alpha) - e_\alpha] = \frac{e^{2\eta_\alpha\omega_\alpha}}{\sigma^4\omega_\alpha}.$$

Le premier membre est donc indépendant de u; on obtiendra du second membre une forme plus commode dans les applications en donnant à u une valeur particulière; nous choisirons une valeur ω_β. Comme $\omega_\alpha + \omega_\beta = -\omega_\gamma$ et que $p(-\omega_\gamma) =$ [illegible] e qu'on l'égalité (k) deviendra [illegible] e_3). Lorsqu périodes, no

$$(l)\qquad (e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha) = \frac{e^{2\eta_\alpha\omega_\alpha}}{\sigma^4\omega_\alpha};$$

par comparaison de (k) et de (l) nous parvenons enfin à l'équation

$$(59) \qquad (pu - e_\alpha)[p(u+\omega_\alpha) - e_\alpha] = (e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha),$$

qui nous sera des plus utiles dans les applications.

On peut arriver au même résultat par une autre marche; la formule que nous avons déduite de (39) par l'échange des lettres u et v peut s'écrire, avec les notations actuelles,

$$\frac{1}{pu - pv} = -\frac{\zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta v}{p'v}.$$

Si l'on fait $v = \omega_\alpha$, pv devient e_α; mais les deux termes du second membre s'annulent, le dénominateur d'après ce que nous avons dit, page 40, le numérateur parce que, en vertu de la formule (36),

$$\zeta(u+\omega_\alpha) = \zeta(u - \omega_\alpha + 2\omega_\alpha) = \zeta(u - \omega_\alpha) + 2\eta_\alpha.$$

Il faut donc appliquer la règle de L'Hôpital, ce qui donne, en dérivant par rapport à v,

$$\frac{1}{pu - e_\alpha} = \frac{p(u+\omega_\alpha) + p(u-\omega_\alpha) - 2p\omega_\alpha}{p''\omega_\alpha},$$

ou, à cause de la périodicité de pu,

$$\frac{1}{pu - e_\alpha} = \frac{2p(u+\omega_\alpha) - 2e_\alpha}{p''\omega_\alpha}.$$

Il en résulte

$$(m) \qquad (pu - e_\alpha)[p(u+\omega_\alpha) - e_\alpha] = \frac{p''\omega_\alpha}{2}.$$

Le rapprochement des équations (59) et (m) donne l'intéressante formule

$$(n) \qquad \frac{1}{2}p''\omega_\alpha = (e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha).$$

Relations entre les carrés de trois fonctions σ. — L'équation (58) peut s'écrire

$$pu = e_1 + \frac{\sigma_1^2 u}{\sigma^2 u} = e_2 + \frac{\sigma_2^2 u}{\sigma^2 u} = e_3 + \frac{\sigma_3^2 u}{\sigma^2 u}.$$

On en déduit les relations

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} (e_1-e_2)\sigma^2 u+\sigma_1^2 u-\sigma_2^2 u&=0,\\ (e_2-e_3)\sigma^2 u+\sigma_2^2 u-\sigma_3^2 u&=0,\\ (e_3-e_1)\sigma^2 u+\sigma_3^2 u-\sigma_1^2 u&=0,\\ (e_3-e_2)\sigma_1^2 u+(e_1-e_3)\sigma_2^2 u+(e_2-e_1)\sigma_3^2 u&=0,\end{aligned}\right.$$

parmi lesquelles il est évident que deux seulement sont indépendantes.

Relations entre les carrés de trois fonctions θ. — Il suffit de remplacer, dans les formules précédentes, les fonctions σ par leurs valeurs tirées des équations (22); on trouve ainsi

$$(61)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{e_1-e_2}{\theta'^2(0)}\theta^2 u+\frac{\theta_1^2 u}{\theta_1^2(0)}-\frac{\theta_2^2 u}{\theta_2^2(0)}&=0,\\ \frac{e_2-e_3}{\theta'^2(0)}\theta^2 u+\frac{\theta_2^2 u}{\theta_2^2(0)}-\frac{\theta_3^2 u}{\theta_3^2(0)}&=0,\\ \frac{e_3-e_1}{\theta'^2(0)}\theta^2 u+\frac{\theta_3^2 u}{\theta_3^2(0)}-\frac{\theta_1^2 u}{\theta_1^2(0)}&=0,\\ (e_3-e_2)\frac{\theta_1^2 u}{\theta_1^2(0)}+(e_1-e_3)\frac{\theta_2^2 u}{\theta_2^2(0)}+(e_2-e_1)\frac{\theta_3^2 u}{\theta_3^2(0)}&=0.\end{aligned}\right.$$

Dans la première de ces équations, faisons $u=\omega_1$; elle devient

$$(e_1-e_2)\frac{\theta^2\omega_1}{\theta'^2(0)}=\frac{\theta_2^2\omega_1}{\theta_2^2(0)}.$$

Or, des formules (17) on déduit, en y faisant $u=0$,

$$\theta\ \omega_1=\theta_1(0),$$
$$\theta_2\omega_1=\theta_3(0);$$

donc

$$(o)\qquad e_1-e_2=\frac{\theta_3^2(0)\theta'^2(0)}{\theta_2^2(0)\theta_1^2(0)}.$$

Cette formule et les suivantes résulteraient aussi de la comparaison entre les formules (61) et les équations (n) du Chapitre II.

De même, dans la deuxième équation (61), faisons $u=\omega_2$; elle devient

$$(e_2-e_3)\frac{\theta^2\omega_2}{\theta'^2(0)}=\frac{\theta_3^2\omega_2}{\theta_3^2(0)}.$$

Or, les formules (18) nous donnent, en y faisant $u = 0$.

$$\theta\,\omega_2 = iq^{-\frac{1}{4}}\theta_2(0),$$

$$\theta_3\omega_2 = q^{-\frac{1}{4}}\theta_1(0);$$

donc

$$(p) \qquad e_2 - e_3 = -\frac{\theta_1^2(0)\,\theta'^2(0)}{\theta_2^2(0)\,\theta_3^2(0)}.$$

Enfin, dans la troisième équation (61), faisons $u = \omega_3$; elle devient

$$(e_3 - e_1)\frac{\theta^2(\omega_3)}{\theta'^2(0)} - \frac{\theta_1^2(\omega_3)}{\theta_1^2(0)} = 0.$$

Or, les formules (17) et (18) combinées nous donneront, en faisant dans les premières $u = \omega_2$ et dans les secondes $u = 0$,

$$\theta(\omega_3) = \theta(-\omega_1 - \omega_2) = -\theta(\omega_1 + \omega_2) = -\theta_1(\omega_2) = q^{-\frac{1}{4}}\theta_3(0),$$

$$\theta_1(\omega_3) = \theta_1(\omega_1 + \omega_2) = -\theta\omega_2 = iq^{-\frac{1}{4}}\theta_2(0);$$

donc

$$(q) \qquad e_3 - e_1 = -\frac{\theta_2^2(0)\,\theta'^2(0)}{\theta_1^2(0)\,\theta_3^2(0)}.$$

Corollaire. — En additionnant membre à membre les trois équations (o), (p), (q), on obtient la relation

$$(r) \qquad \theta_1^4(0) + \theta_2^4(0) = \theta_3^4(0),$$

déjà obtenue page 23.

Expression de e_α en fonction des θ. — En retranchant membre à membre deux quelconques des équations (o), (p), (q) et tenant compte de ce que $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, on trouve

$$(s) \qquad \left\{\begin{aligned} 3e_1 &= \frac{[\theta_3^4(0) + \theta_2^4(0)]\,\theta'^2(0)}{\theta_1^2(0)\,\theta_2^2(0)\,\theta_3^2(0)},\\ 3e_2 &= -\frac{[\theta_1^4(0) + \theta_3^4(0)]\,\theta'^2(0)}{\theta_1^2(0)\,\theta_2^2(0)\,\theta_3^2(0)},\\ 3e_3 &= \frac{[\theta_1^4(0) - \theta_2^4(0)]\,\theta'^2(0)}{\theta_1^2(0)\,\theta_2^2(0)\,\theta_3^2(0)}.\end{aligned}\right.$$

On voit ainsi que e_1, e_2, e_3 sont nécessairement réelles lorsque les fonctions θ ont été construites avec des constantes ω_1 et $\frac{\omega_2}{i}$ réelles et positives. De plus, e_1 est nécessairement positive, e_2 négative, et l'on a

$$e_1 > e_3 > e_2.$$

Des valeurs de e_1, e_2, e_3 ou mieux des formules (o), (p), (q), on déduirait facilement, s'il en était besoin, les invariants g_2, g_3 et le discriminant Δ.

Rapprochements entre diverses constantes. Introduction des e_α dans la définition de sn, cn, dn. — Nous avons posé (45)

$$\lambda = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \theta_3^4(0).$$

D'autre part, on vient de voir (o) que

$$e_1 - e_2 = \frac{\theta_3^2(0)\,\theta'^2(0)}{\theta_1^2(0)\,\theta_2^2(0)}.$$

Or, il résulte de la formule (s) qui termine le Chapitre II que les deux seconds membres sont égaux dans les équations précédentes; d'où plusieurs conséquences :

1° Formules plus simples pour remplacer (o), (p), (q), (s),

$$(o') \qquad e_1 - e_2 = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \theta_3^4(0);$$

de même

$$(p') \qquad e_2 - e_3 = -\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \theta_1^4(0);$$

$$(q') \qquad e_3 - e_1 = -\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \theta_2^4(0);$$

$$(s') \qquad \left\{\begin{aligned} 3e_1 &= \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 [\theta_2^4(0) + \theta_3^4(0)], \\ 3e_2 &= -\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 [\theta_1^4(0) + \theta_3^4(0)], \\ 3e_3 &= \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 [\theta_1^4(0) - \theta_2^4(0)]. \end{aligned}\right.$$

2° Les formules qui définissent $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ sont aussi

modifiées (nous n'écrirons que les deux premières),

$$(46')\quad \left\{\begin{array}{l} \lambda = e_1 - e_2, \\ \operatorname{sn} u = \sqrt{e_1 - e_2}\,\dfrac{\theta\dfrac{u}{\sqrt{e_1-e_2}}}{\theta_2\dfrac{u}{\sqrt{e_1-e_2}}}\,\dfrac{\theta_2(0)}{\theta'(0)} = \dfrac{\sigma\dfrac{u}{\sqrt{e_1-e_2}}}{\sigma_2\dfrac{u}{\sqrt{e_1-e_2}}}. \end{array}\right.$$

3° Les équations (48) peuvent s'écrire

$$(48')\qquad \omega_1 = \frac{K}{\sqrt{e_1-e_2}}, \qquad \omega_2 = \frac{iK'}{\sqrt{e_1-e_2}}.$$

4° En comparant les formules qui viennent d'être écrites avec les équations (m) du Chapitre II, on trouve

$$(62)\qquad k^2 = \frac{e_3-e_2}{e_1-e_2}, \qquad k'^2 = \frac{e_1-e_3}{e_1-e_2};$$

d'où résulte la relation déjà remarquée au Chapitre II,

$$(62\ bis)\qquad k^2 + k'^2 = 1.$$

Il importe de remarquer que, dans les mêmes hypothèses faites constamment, savoir ω_1 et $\frac{\omega_2}{i}$ réelles, ce qui entraîne e_1, e_2, e_3 réelles et $e_1 > e_3 > e_2$, les deux modules sont réels et inférieurs à l'unité.

Relation entre pu et $\operatorname{sn} u$. — La relation cherchée résulte immédiatement de l'équation (46') combinée avec (58),

$$(63)\qquad \operatorname{sn} u = \frac{\sqrt{e_1-e_2}}{\sqrt{p\dfrac{u}{\sqrt{e_1-e_2}} - e_2}}.$$

Cette même équation, résolue par rapport à pu, donne en écrivant u, au lieu de $\frac{u}{\sqrt{e_1-e_2}}$,

$$(63\ bis)\qquad pu = e_2 + \frac{e_1-e_2}{\operatorname{sn}^2 u\sqrt{e_1-e_2}}.$$

Équations différentielles auxquelles satisfont $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$. — Il suffit de porter dans l'équation (55 *bis*), que je trans-

cris de nouveau,

$$p'^2 u = 4(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3),$$

la valeur de pu, tirée de (63 *bis*),

$$p'u = -\frac{2(e_1 - e_2)\sqrt{e_1 - e_2}\,\mathrm{sn}'(u\sqrt{e_1 - e_2})}{\mathrm{sn}^3 u\sqrt{e_1 - e_2}},$$

$$\frac{4(e_1 - e_2)^3\,\mathrm{sn}'^2 u}{\mathrm{sn}^6 u} = 4(e_1 - e_2)^3\left(\frac{1}{\mathrm{sn}^2 u} - 1\right)\frac{1}{\mathrm{sn}^2 u}\left(\frac{1}{\mathrm{sn}^2 u} - \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2}\right).$$

J'ai écrit dans la dernière équation u au lieu de $u\sqrt{e_1 - e_2}$; il n'y a plus qu'à tenir compte de la première équation (62) pour obtenir l'équation cherchée

$$\mathrm{sn}'^2 u = (1 - \mathrm{sn}^2 u)(1 - k^2\mathrm{sn}^2 u). \tag{64}$$

Si l'on se reporte aux équations (53), on verra que cette équation peut s'écrire, en choisissant les signes après l'extraction de la racine carrée de manière que les deux membres aient pour limite $+1$ lorsque u tend vers zéro,

$$\frac{\partial\,\mathrm{sn}\,u}{\partial u} = \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u, \tag{65}$$

à laquelle on peut adjoindre les deux formules obtenues par la différentiation des équations (53)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\,\mathrm{cn}\,u}{\partial u} &= -\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u, \\ \frac{\partial\,\mathrm{dn}\,u}{\partial u} &= -k^2\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u. \end{aligned}\right. \tag{65 bis}$$

Remarque. — Le système de trois équations différentielles que nous venons d'obtenir est souvent considéré comme définissant les fonctions elliptiques de Jacobi; il suffit d'ajouter les conditions initiales, à savoir que, pour $u = 0$, on aura

$$\mathrm{sn}\,u = 0, \qquad \mathrm{cn}\,u = 1, \qquad \mathrm{dn}\,u = 1.$$

Formules d'addition des fonctions elliptiques de Jacobi. — Ce serait ici le moment de donner ces formules qui résultent immédiatement de la formule (57) et des relations déjà établies; mais ces formules d'addition ne devant pas nous servir, nous en laissons

la démonstration comme exercice aux lecteurs (*voir* à la fin du Chapitre). On en trouvera d'ailleurs plus loin une démonstration plus élégante.

Variation de pu dans le cas où u et pu sont réelles.

Considérations générales. — Nous avons vu que la fonction pu satisfait à l'équation différentielle (55)

$$p'^2 u = 4p^3 u - g_2 pu - g_3, \tag{55}$$

dans laquelle les invariants g_2 et g_3 dépendent des périodes données $2\omega_1$ et $2\omega_2$; mais la réciproque n'est pas absolument évidente, et, s'il est assez facile d'admettre, comme d'ailleurs on le démontre dans tous les Cours d'Analyse, que l'équation

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3 = Z \tag{α}$$

définit une fonction z de u [1], il est moins évident que, quelles que soient les valeurs attribuées à g_2 et g_3, cette fonction z sera une fonction doublement périodique. Pour ne pas compliquer notre étude, nous admettrons ce théorème qui est démontré dans les Ouvrages plus importants, et nous nous bornerons à deux observations : d'abord, le théorème est probable, puisque, définie par les fonctions θ ou par une équation différentielle, la fonction pu dépend toujours au fond de *deux* constantes arbitraires, ses périodes ou ses invariants. La seconde observation est la suivante : nous allons rencontrer dans la discussion une période réelle $2\omega_1$ et une période imaginaire pure $2\omega_2$; si l'on essaye de construire avec ces périodes une fonction θ pour en déduire une fonction pu, la fonction pu ne coïncidera avec celle déduite de l'équation différentielle (55) ou (α) que si le discriminant $\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$ est positif, en d'autres termes, que si les racines e_1, e_2, e_3 sont réelles. Cette restriction ne doit pas nous étonner; nous avons vu, en effet, page 54, que les périodes réelles conduisent nécessairement

---

[1] Cette fonction est l'inverse de la fonction u de z définie par $u = \int \frac{dz}{\sqrt{Z}}$, et la solution générale de (α) est $z = p(u + c)$.

à des racines réelles. Dans le cas du discriminant négatif, la fonction θ, d'où l'on déduirait une fonction pu coïncidant avec celle que fournit l'équation (α), devrait être construite avec deux constantes imaginaires conjuguées 2ω et $2\omega'$, définies par les relations

$$(\gamma) \qquad \begin{cases} 2\omega = 2\omega_1 + 2\omega_2, \\ 2\omega' = 2\omega_1 - 2\omega_2. \end{cases}$$

On distingue ces deux cas en disant que, dans le premier, les périodes sont *primitives;* dans le second cas, les périodes ne sont pas primitives.

Variation de pu. — Quoi qu'il en soit de ces considérations préliminaires, nous pouvons continuer à supposer que pu est définie par l'équation (41); il nous suffit d'avoir démontré qu'elle vérifie l'équation différentielle (55) que nous écrirons aussi

$$(\delta) \qquad u = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{Z}},$$

en posant, pour abréger, $z = pu$: les limites ont été choisies de manière que $u = 0$ corresponde à $z = \infty$.

Il n'y a pas besoin, pour le moment, de distinguer le cas du discriminant positif et celui du discriminant négatif; nous nous bornerons à supposer

$$e_1 > e_3 > e_2,$$

si les racines sont réelles et e_1 réelle si le discriminant est négatif. Les invariants g_2, g_3 sont, bien entendu, supposés réels.

Pour $u = 0$, pu est infinie; pu commence donc par décroître et sa dérivée par être négative. Il faut donc, de l'équation (55), conclure

$$p'u = -\sqrt{4p^3u - g_2 pu - g_3}.$$

pu décroîtra tant que la dérivée ne s'annulera pas, c'est-à-dire jusqu'à e_1 première racine de Z. Nous savons que u prendra alors pour valeur une des demi-périodes (56) et ce sera évidemment la plus petite demi-période réelle ω_1 ; $e_1 = p\omega_1$ est un minimum. Ce minimum sera nécessairement positif, si les racines sont réelles, à cause de la relation $e_1 + e_2 + e_3 = 0$; il pourra être négatif si le discriminant Δ est négatif. Le facteur $\sqrt{pu - e_1}$ n'ayant, d'après

la formule (58), que des racines simples, change de signe en s'annulant et il faut écrire maintenant

$$p'u = +\sqrt{4p^3u - g_2 pu - g_3}.$$

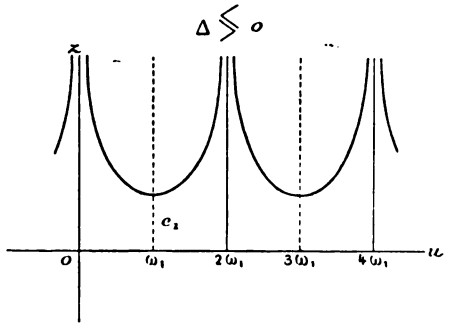
La fonction pu recommence à croître et devient infinie pour $u = 2\omega_1$; d'ailleurs on a, puisque $2\omega_1$ est une période,

$$p(u+\omega_1) = p(u-\omega_1+2\omega_1) = p(u-\omega_1),$$

et il suffisait de faire varier u de zéro à ω_1 pour en déduire immédiatement la variation de pu entre ω_1 et $2\omega_1$. La fonction pu repassera ensuite par les mêmes valeurs.

Nous représenterons cette variation par une courbe; les droites $u = 0$, $u = \omega_1$, $u = 2\omega_1$, $u = 3\omega_1$, ... seront des axes de symétrie (*fig.* 1).

Fig. 1.



Corollaire. — Il résulte de la discussion précédente que l'on a, ω_1 étant une demi-période réelle,

$$(66) \qquad \omega_1 = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dz}{2\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}} = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{Z}}.$$

Formule d'homogénéité. — Posons, dans la formule (δ),

$$(\varepsilon) \qquad \begin{cases} z = \mu y, \\ e_1 = \mu e'_1, \quad e_2 = \mu e'_2. \quad e_3 = \mu e'_3, \end{cases}$$

d'où résultera

$$(\zeta) \qquad g_2 = \mu^2 g'_2, \qquad g_3 = \mu^3 g'_3,$$

en posant

$$(\eta)\qquad \begin{cases} g'_2 = -\frac{1}{4}(e'_1 e'_2 + e'_2 e'_3 + e'_3 e'_1), \\ g'_3 = \frac{1}{4} e'_1 e'_2 e'_3, \end{cases}$$

l'équation (δ) pourra s'écrire

$$(\theta)\qquad u = \int_y^\infty \frac{dy}{\sqrt{(4y^3 - g'_2 y - g'_3)\mu}},$$

et il suffira d'appeler v la quantité $u\sqrt{\mu}$ pour voir que

$$y = \wp(v;\, g'_2,\, g'_3).$$

Cette dernière équation peut s'écrire, en tenant compte de la définition de v et des égalités (ε) et (ζ),

$$(67)\qquad \wp(u;\, g_2,\, g_3) = \mu\,\wp\left(u\sqrt{\mu};\, \frac{g_2}{\mu^2},\, \frac{g_3}{\mu^3}\right).$$

Cette très importante formule est connue sous le nom de *formule d'homogénéité* de $\wp u$.

Deuxième période. — En particulier, soit pris μ égal à *moins un;* la formule (67) devient

$$(67)'\qquad \wp(u;\, g_2,\, g_3) = -\wp(ui;\, g_2,\, -g_3);$$

dans cette formule, i désigne, comme de coutume, le symbole imaginaire $\sqrt{-1}$; on a de plus

$$e'_1 = -e_1,\qquad e'_2 = -e_2,\qquad e'_3 = -e_3,\qquad g'_2 = g_2,\qquad g'_3 = -g_3,$$

et

$$-e_2 > -e_3 > -e_1.$$

L'équation (θ) devient

$$v = u\sqrt{-1} = \int_y^\infty \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y + g_3}}$$
$$= \int_y^\infty \frac{dy}{\sqrt{4(y+e_1)(y+e_2)(y+e_3)}} = \int_y^\infty \frac{dy}{\sqrt{Y}}.$$

La quantité

$$v_2 = \int_{-e_2}^\infty \frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

sera de nouveau une intégrale définie réelle, et si l'on pose

$$v_2 = -\omega_2\sqrt{-1},$$

la quantité ω_2 sera purement imaginaire. De plus, $2v_2$ est une période de la fonction y, c'est-à-dire qu'on a

$$p(v + 2v_2;\ g'_2,\ g'_3) = p(v;\ g'_2,\ g'_3)$$

ou, en se reportant à la formule (ζ),

$$p(ui - 2\omega_2 i;\ g_2,\ -g_3) = p(ui;\ g_2,\ -g_3)$$

ou enfin à cause de la formule d'homogénéité,

$$p(u - 2\omega_2;\ g_2,\ g_3) = p(u;\ g_2,\ g_3).$$

Donc la quantité purement imaginaire $2\omega_2$ sera une période de notre première fonction pu : elle est définie par l'équation

$$(66)' \qquad \omega_2 = v_2 i = i\int_{-e_2}^{\infty}\frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

avec

$$Y = 4y^3 - g_2 y + g_3.$$

Corollaire. — Si l'on pose $y = -z$ et si l'on fait rentrer i sous le radical, on pourra aussi écrire

$$(\mu) \qquad \omega_2 = \int_{-\infty}^{e_2}\frac{dz}{\sqrt{Z}}.$$

Autres valeurs réelles de pu. — Nous venons de voir qu'aux valeurs réelles de u ne correspondent que des valeurs réelles de pu toutes supérieures à la racine e_1 (plus grande racine si le discriminant est positif, seule racine réelle dans le cas contraire). Il est intéressant de montrer que pu pourra atteindre toutes les valeurs réelles; les valeurs correspondantes de u que nous allons rencontrer seront naturellement imaginaires. Nous avons cru pouvoir représenter les résultats par des courbes; parallèlement aux abscisses sont portées des quantités imaginaires, mais les variables v et t sont réelles. Les ordonnées restent réelles et représentent les valeurs de pu.

Pour avoir la première de ces courbes, nous nous sommes appuyé sur ce que, d'après la formule d'homogénéité (67'), aux valeurs purement imaginaires de u correspondaient des valeurs réelles de $u\sqrt{-1}$ et de $\wp(u; g_2, -g_3)$; ces valeurs de $\wp(u; g_2, -g_3)$ sont supérieures à la plus grande racine $-e_2$ correspondante et, par suite, $\wp(u; g_2, g_3)$ est inférieure à e_2.

La seconde courbe a été construite en utilisant la formule (59) dans laquelle nous avons fait $\alpha = 2$,

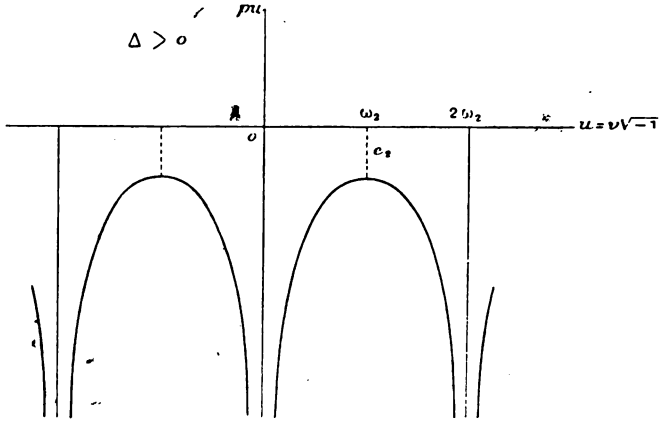
$$\wp(v + \omega_2) = e_2 + \frac{(e_1 - e_2)(e_3 - e_2)}{\wp v - e_2}.$$

On voit ainsi que, v variant de zéro à ω_1 ou u de ω_2 à $\omega_1 + \omega_2 = -\omega_3$, $\wp u = \wp(v + \omega_2)$ varie de e_2 à e_3.

La troisième courbe exige l'application successive des deux remarques précédentes; en premier lieu, la formule d'homogénéité permettra d'obtenir des valeurs réelles de $\wp(u; g_2, -g_3)$ correspondant aux valeurs purement imaginaires de $\wp(u; g_2, g_3)$. Ensuite la formule (59) permettra de rattacher les valeurs comprises entre e_1 et e_3 aux valeurs inférieures à e_2.

Ces deux courbes n'existent pas dans le cas du discriminant

Fig. 2.



négatif; dans ce dernier cas, le maximum des valeurs atteintes pour u imaginaire coïncide avec le minimum des valeurs qui cor-

respondent à u réel : c'est ce que rappellera une dernière courbe. Les *fig.* 2 et 3 ont été construites en supposant e_3 négatif. On

Fig. 3.

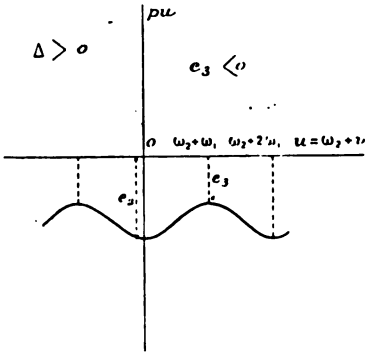
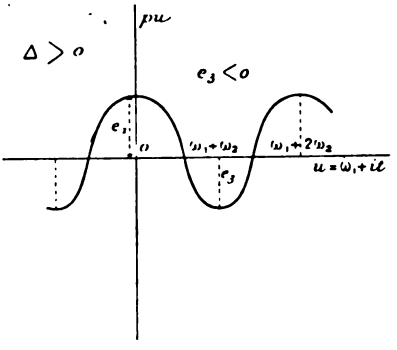
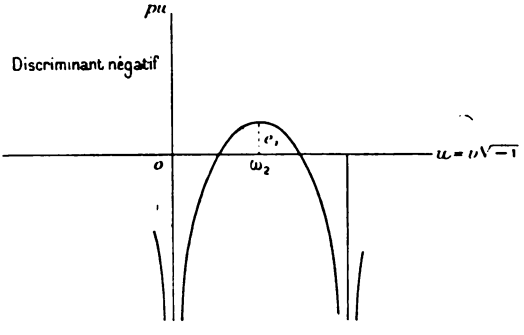


Fig. 4.



verrait aisément ce qu'on doit faire dans les hypothèses inverses.

Fig. 5.



Remarque. — Les figures précédentes montrent clairement dans tous les cas les deux zéros de pu (aux périodes près).

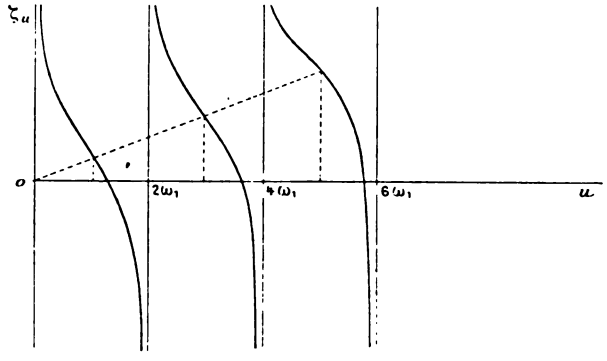
En résumé, dans le cas du discriminant positif, pu prend des valeurs réelles pour toutes les valeurs réelles de u, pour toutes les valeurs purement imaginaires, enfin pour les valeurs complexes de la forme $\omega_2 + v$ ou de la forme $\omega_1 + iv$ (v étant réelle). Dans le cas du discriminant négatif, pu est réel pour toutes les valeurs réelles ou purement imaginaires de u.

Autre remarque. — Si Δ est positif, il résulte de la formule (59)

que $p(u+\omega_\alpha)$ est réel avec u; mais $\alpha=3$ ne donnera pas de nouvelles valeurs, puisque toutes les valeurs réelles ont été atteintes précédemment.

Retour à la fonction ζu : sa variation. — Supposons d'abord le discriminant positif : pu est alors toujours positive et $\zeta' u$ toujours négative. On a alors une courbe telle que celle de la *fig.* 6;

Fig. 6.

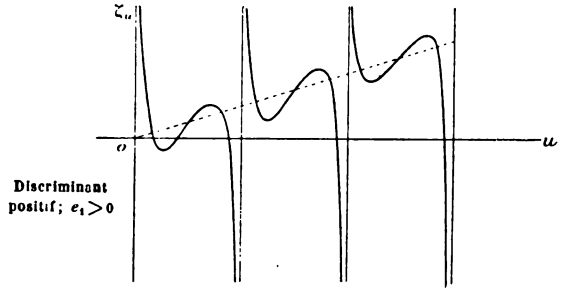


chaque branche se déduit facilement de la précédente par la relation

$$\zeta(u+2\omega_1)=\zeta u+2\eta_1.$$

Les points d'inflexion correspondent aux valeurs $u=\omega_1$, $u=3\omega_1$, $u=5\omega_1$, ... qui annulent $\zeta'' u=-p' u$; la figure a

Fig. 7.

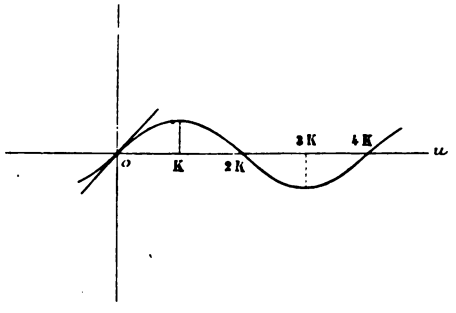


été faite en supposant η_1 positif, et les valeurs de ζu aux points d'inflexion sont η_1, $3\eta_1$, $5\eta_1$, ...

Si le discriminant est négatif, mais si e_1 est positive, la discussion ne diffère pas sensiblement de la précédente. Si e_1 est négative, pu et $\zeta' u$ s'annulent deux fois en changeant de signes; ζu présentera un maximum et un minimum dans chaque intervalle égal à $2\omega_1$ (*fig.* 7).

Variation de $\operatorname{sn} u$. — La variation de $\operatorname{sn} u$ résulte immédiatement de sa définition et de la variation de pu : on peut aussi se rappeler les formules (64) et (65). On voit ainsi que u variant de o à K, $\frac{u}{\sqrt{\lambda}}$ varie de o à ω_1 et $\operatorname{sn} u$ croît de o à $+1$; puis, à cause de l'équation (65), la dérivée change de signe, comme $\operatorname{cn} u$, et $\operatorname{sn} u$ décroît de $+1$ à o, valeur atteinte lorsque $u = 2\mathrm{K}$ ou $\frac{u}{\sqrt{\lambda}} = 2\omega_1$. L'équation (49) nous montre que $\operatorname{sn} u$ change alors de signe et repasse par les mêmes valeurs, au signe près : l'aspect de la courbe (*fig.* 8) est sensiblement celui d'une sinusoïde.

Fig. 8.



Tout cela suppose, ainsi que le corollaire suivant, k^2 réel et inférieur à *un* ou encore e_1, e_2, e_3 réelles.

Corollaire I. — L'équation (64) pourrait s'écrire, par imitation de ce qui a été fait pour pu,

$$u = \int_0^{\operatorname{sn} u} \frac{d \operatorname{sn} u}{\sqrt{(1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u)}}$$

ou, en posant

$$x = \operatorname{sn} u,$$
$$\mathrm{X} = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2),$$
$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}.$$

Legendre pose $x = \sin\varphi$ et appelle *intégrale elliptique de première espèce* l'intégrale précédente qu'il désigne par la notation $F(k, \varphi)$ ou $F(\varphi)$; on a donc

$$F(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}.$$

Il résulte de la discussion précédente que u atteint la valeur K en même temps que x la valeur un; donc

$$(68) \qquad K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{X}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}.$$

Corollaire II. — Nous avons démontré, page 61, la formule (66')

$$\omega_2 = i \int_{-e_2}^{\infty} \frac{dy}{2\sqrt{(y + e_1)(y + e_2)(y + e_3)}}.$$

Si l'on considère la fonction $\mathrm{sn}_1 u$ qui correspond aux racines $e'_1 = -e_1$, $e'_2 = -e_2$, $e'_3 = -e_3$, le multiplicateur correspondant sera

$$\lambda' = e'_2 - e'_1 = e_1 - e_2 = \lambda,$$

et le carré du module

$$\frac{e'_3 - e'_1}{e'_2 - e'_1} = \frac{e_1 - e_3}{e_1 - e_2}.$$

C'est donc la quantité désignée déjà (62) par la notation k'^2; $\mathrm{sn}_1 u$ sera donc la fonction $\mathrm{sn}(u, k')$. Le quart de sa période réelle sera, d'après (68),

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k'^2 x^2)}},$$

et si l'on remarque que la fonction $\mathrm{sn}(u, k')$ et la fonction $p(u; e'_1, e'_2, e'_3)$, pages 50 et 55, sont reliées l'une à l'autre comme $\mathrm{sn}(u, k)$ et $p(u; e_1, e_2, e_3)$, on voit immédiatement, en se rappelant la première des égalités (48') ou (48), que

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_2}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k'^2 x^2)}};$$

mais, d'autre part, la seconde égalité (48') nous donne

$$\omega_2 = \frac{iK'}{\sqrt{e_1 - e_2}}.$$

Il en résulte, comme $\omega_2 = v_2 i$, que

$$(69) \qquad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}},$$

et les périodes purement imaginaires de pu ou de $\operatorname{sn} u$ se trouvent exprimées comme les périodes réelles, au facteur i près, par des intégrales définies entièrement réelles.

Exercices sur le Chapitre IV.

1. Si l'on pose

$$\sigma_{\alpha\beta} u = \frac{\sigma_\alpha u}{\sigma_\beta u}, \qquad \sigma_0 u = \sigma u,$$

démontrer les formules

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha 0}(u + 2\omega_\alpha) &= \sigma_{\alpha 0} u, \\
\sigma_{\alpha 0}(u + 2\omega_\beta) &= -\sigma_{\alpha 0} u, \\
\sigma_{\alpha\beta}(u + 2\omega_\alpha) &= -\sigma_{\alpha\beta} u, \\
\sigma_{\alpha\beta}(u + 2\omega_\beta) &= -\sigma_{\alpha\beta} u, \\
\sigma_{\alpha\beta}(u + 2\omega_\gamma) &= \sigma_{\alpha\beta} u \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3).
\end{aligned}$$

2. Démontrer les formules

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\beta}(u + \omega_\alpha) &= c\ \sigma_{0\gamma} u, \\
\sigma_{\alpha\beta}(u + \omega_\gamma) &= c_1 \sigma_{\beta\alpha} u,
\end{aligned}$$

c et c_1 étant indépendantes de u.

3. De la formule (55) déduire la relation

$$p''\omega_\alpha = 2(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha) \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3; \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma).$$

4. Exprimer l'invariant g_2 et le discriminant $\Delta = 27 g_3^2 - g_2^3$ en fonction des périodes.

Réponse :

$$\begin{aligned}
g_2 &= \frac{2}{3} \frac{[\theta_1^8(0) + \theta_2^8(0) + \theta_3^8(0)]}{\theta_1^4(0)\theta_2^4(0)\theta_3^4(0)} \theta'^4(0), \\
\Delta &= 16 \frac{\theta'^8(0)}{\theta_1^4(0)\theta_2^4(0)\theta_3^4(0)}.
\end{aligned}$$

5. Trouver l'équation différentielle à laquelle satisfait $\operatorname{cn} u$.

Réponse : $$\operatorname{cn}' u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u.$$

6. Trouver l'équation différentielle à laquelle satisfait $\operatorname{dn} u$.

Réponse : $$\operatorname{dn}' u = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u.$$

7. Des formules (65), combinées avec les conditions initiales données dans la remarque subséquente, déduire les équations (53) et l'équation (64).

8. Déduire de la formule (57) les formules d'addition des fonctions de Jacobi

$$\left\{\begin{aligned}
\operatorname{sn}(u+v) &= \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},\\
\operatorname{cn}(u+v) &= \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},\\
\operatorname{dn}(u+v) &= \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.
\end{aligned}\right.$$

On peut encore opérer directement, de la manière suivante :

Dans l'équation (8), à trois termes, posons

$$a = \frac{u+v}{2} + \omega_2,$$
$$b = \frac{u+v}{2},$$
$$c = \frac{u+v}{2} + \omega_1,$$
$$d = \frac{v-u}{2};$$

elle devient

$$\begin{aligned}
&-\theta\omega_1\,\theta(u+v+\omega_1)\,\theta(u+\omega_2)\,\theta(v+\omega_2)\\
&+\theta(\omega_1-\omega_2)\,\theta(u+v+\omega_1+\omega_2)\,\theta u\,\theta v\\
&+\theta\omega_2\,\theta(u+v+\omega_2)\,\theta(u+\omega_1)\,\theta(v+\omega_1) = 0
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
&-\theta_1 0\,\theta_1(u+v)\,\theta_2 u\,\theta_2 v\\
&-\theta_3 0\,\theta_3(u+v)\,\theta_0 u\,\theta_0 v\\
&+\theta_2 0\,\theta_2(u+v)\,\theta_1 u\,\theta_1 v = 0,
\end{aligned}$$

ou, en divisant par $\dfrac{\theta_2(u)\,\theta_2(v)\,\theta_2(u+v)\,\theta_1^2(0)}{\theta_2(0)}$, et remplaçant u par $\dfrac{u}{\sqrt{\lambda}}$,

v par $\frac{v}{\sqrt{\lambda}}$,

$$\text{(A)} \qquad \operatorname{cn}(u+v) + \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn}(u+v) - \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v = 0.$$

De même, la substitution, faite dans l'équation (8),

$$a = \frac{u+v}{2} + \omega_1,$$

$$b = \frac{u+v}{2} + \omega_2,$$

$$c = \frac{u+v}{2} + \omega_3,$$

$$d = \frac{v-u}{2}$$

conduira à l'équation

$$\text{(B)} \qquad \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \operatorname{dn}(u+v) - k^2 \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \operatorname{cn}(u+v) = 1 - k^2.$$

Les équations (A) et (B) font connaître $\operatorname{cn}(u+v)$ et $\operatorname{dn}(u+v)$ par des formules qu'on ramène immédiatement à la forme voulue, à l'aide des relations (53).

Enfin la substitution

$$a = \frac{u+v}{2} + \frac{\omega_3 - \omega_1}{2},$$

$$b = \frac{u+v}{2} - \frac{\omega_3 - \omega_1}{2},$$

$$c = \frac{u+v}{2} + \frac{\omega_1 + \omega_3}{2},$$

$$d = \frac{v-u}{2} + \frac{\omega_3 - \omega_1}{2}$$

fournira l'équation

$$\operatorname{sn} u \operatorname{cn}(u+v) + \operatorname{sn} v \operatorname{dn}(u+v) - \operatorname{cn} u \operatorname{dn} v \operatorname{sn}(u+v) = 0,$$

qui, combinée avec les résultats précédents, fera connaître $\operatorname{sn}(u+v)$.

9. Démontrer les formules

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{sn}(x+K) &= \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x}, \\ \operatorname{cn}(x+K) &= -\frac{k' \operatorname{sn} x}{\operatorname{dn} x}, \\ \operatorname{dn}(x+K) &= \frac{k'}{\operatorname{dn} x}; \end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} \operatorname{sn}(x+iK') = \dfrac{1}{k\operatorname{sn}x}, \\ \operatorname{cn}(x+iK') = -\dfrac{i\operatorname{dn}x}{k\operatorname{sn}x}, \\ \operatorname{dn}(x+iK') = -\dfrac{i\operatorname{cn}x}{\operatorname{sn}x}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sn}(x+K+iK') = \dfrac{\operatorname{dn}x}{k\operatorname{cn}x}, \\ \operatorname{cn}(x+K+iK') = -\dfrac{ik'}{k\operatorname{cn}x}, \\ \operatorname{dn}(x+K+iK') = \dfrac{ik'\operatorname{sn}x}{k\operatorname{cn}x}. \end{cases}$$

On appliquera, soit exclusivement les définitions, soit les formules d'addition combinées avec les définitions dans les cas particuliers où la variable est une demi-période.

10. Si, dans la formule (59), on fait $u = \frac{\omega_\alpha}{2}$, on obtient $p\frac{\omega_\alpha}{2}$; d'où l'on déduit facilement $p'\frac{\omega_\alpha}{2}$; pour cela, il est commode de poser

$$e_\beta - e_\gamma = a^2, \qquad e_\gamma - e_\alpha = b^2, \qquad e_\alpha - e_\beta = c^2, \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 0.$$

Écrire ces formules en appelant e_α la racine qui correspond à ω_α, et fixer, en particulier, les signes pour $\alpha = 1$ ou $\alpha = 2$ (Halphen, *Fonctions elliptiques*, t. I, p. 52).

Réponse. — Si Δ est > 0, on trouve

$$p\frac{\omega_1}{2} = e_1 + \sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{e_1 - e_3},$$

$$p'\frac{\omega_1}{2} = -2(e_1 - e_3)\sqrt{e_1 - e_2} - 2(e_1 - e_2)\sqrt{e_1 - e_3},$$

$$p\frac{\omega_2}{2} = e_2 - \sqrt{e_3 - e_2}\sqrt{e_1 - e_2},$$

$$p'\frac{\omega_2}{2} = -2i(e_1 - e_2)\sqrt{e_3 - e_2} - 2i(e_3 - e_2)\sqrt{e_1 - e_3}.$$

Si $\Delta < 0$, soit e_1 réelle,

$$e_2 = m + ni \qquad (n > 0);$$

en posant

$$\sqrt{e_1 - e_3} = p + qi \qquad (p > 0,\ q > 0),$$

on trouve

$$\mathrm{p}\,\frac{\omega_1}{2} = e_1 + p^2 + q^2, \qquad \mathrm{p}\,\frac{\omega_2}{2} = e_1 - p^2 - q^2,$$

$$\mathrm{p}'\frac{\omega_1}{2} = -4p(p^2+q^2), \qquad \mathrm{p}'\frac{\omega}{2} = -4iq(p^2+q^2).$$

11. Démontrer la formule

$$\sigma 2u = 2\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_2 u\,\sigma_3 u = -\mathrm{p}'u\,\sigma^4 u.$$

12. Soit

$$\psi_1 u = 1,$$
$$\psi_2 u = -\mathrm{p}'u,$$
$$\psi_3 u = 3\mathrm{p}^4 u - \frac{3}{2}\mathrm{p}^2 u - 3g_3\mathrm{p}u - \frac{1}{16}g_2^2,$$
$$\psi_4 u = \mathrm{p}'u(\mathrm{p}'^4 u - \psi_3 \mathrm{p}'' u).$$

Vérifier que

$$\mathrm{p}2u - \mathrm{p}u = -\frac{\psi_1\psi_3}{\psi_2^2},$$

$$\mathrm{p}3u - \mathrm{p}u = -\frac{\psi_2\psi_4}{\psi_3^2}.$$

13. Les formules de l'exercice précédent se généralisent (*voir* HALPHEN, *Fonctions elliptiques*, t. I, p. 96 et 197). On trouve

$$\psi_{2n} = -\frac{\psi_n}{\mathrm{p}'u}(\psi_{n+2}\psi_{n-1}^2 - \psi_{n-2}\psi_{n+1}^2),$$
$$\psi_{2n+1} = \psi_{n+2}\psi_n^3 - \psi_{n-1}\psi_{n+1}^3,$$
$$\psi_n(u) = \frac{\sigma(nu)}{(\sigma u)^{n^2}}.$$

14. Démontrer que

$$4\mathrm{p}2u = \mathrm{p}u + \mathrm{p}(u+\omega_1) + \mathrm{p}(u+\omega_2) + \mathrm{p}(u+\omega_3).$$

15. Démontrer que l'on a :

1° Pour n pair, en posant $m = \frac{n^2}{2}$,

$$\operatorname{sn} nx = n\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x\,\frac{\operatorname{sn}x + \mathrm{A}'\operatorname{sn}^3 x + \ldots + \mathrm{G}'\operatorname{sn}^{2m-3}x}{1 + \mathrm{A}\operatorname{sn}^2 x + \ldots + \mathrm{H}\operatorname{sn}^{2m}x},$$

$$(-1)^{\frac{n}{2}}\operatorname{cn} nx = \frac{1 + \mathrm{A}_1'\operatorname{cn}^2 x + \ldots + \mathrm{H}_1'\operatorname{cn}^{2m}x}{1 + \mathrm{A}_1\operatorname{cn}^2 x + \ldots + \mathrm{H}_1\operatorname{cn}^{2m}x},$$

$$(-1)^{\frac{n}{2}}\operatorname{dn} nx = \frac{1 + \mathrm{A}_2'\operatorname{dn}^2 x + \ldots + \mathrm{H}_2'\operatorname{dn}^{2m}x}{1 + \mathrm{A}_2\operatorname{dn}^2 x + \ldots + \mathrm{H}_2\operatorname{dn}^{2m}x};$$

2° Pour n impair, en posant $m = \frac{n^2-1}{2}$,

$$\operatorname{sn} nx = n\frac{\operatorname{sn} x + \ldots + h' \operatorname{sn}^{2m+1} x}{1 + \ldots + h \operatorname{sn}^{2m} x},$$

$$\operatorname{cn} nx = n\frac{\operatorname{cn} x + \ldots + h'_1 \operatorname{cn}^{2m+1} x}{1 + \ldots + h_1 \operatorname{cn}^{2m} x},$$

$$\operatorname{dn} nx = n\frac{\operatorname{dn} x + \ldots + h'_2 \operatorname{dn}^{2m+1} x}{1 + \ldots + h_2 \operatorname{dn}^{2m} x}.$$

15. Démontrer que

$$\sigma(u; \tfrac{1}{2}\omega_1, \omega_2) = e^{\frac{e_1}{2}u^2} \sigma u \, \sigma_1 u.$$

CHAPITRE V.

INTÉGRATION PAR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES. — INTÉGRALES COMPLÈTES DE LEGENDRE. — USAGE DES TABLES DE FONCTIONS ELLIPTIQUES [FORMULES (70) A (73)].

Dans ce Chapitre, je vais d'abord montrer comment s'intègrent les expressions qui renferment d'une manière rationnelle des fonctions elliptiques; nous verrons ensuite comment s'introduisent ces fonctions elliptiques.

Intégration des expressions rationnelles par rapport aux fonctions elliptiques. — J'envisagerai, en premier lieu, les expressions qui ne renferment que pu et ses dérivées.

Toutes les dérivées de pu, sauf la première, s'exprimant en fonction linéaire de pu et $p'u$, une expression rationnelle en pu et $p'u$ sera toujours de la forme

$$\frac{M + Np'u}{P + Qp'u} = \frac{(M + Np'u)(P - Qp'u)}{P^2 - Q^2p'^2u} = A + Bp'u,$$

M, N, P, Q étant des polynomes en pu et A, B des fractions rationnelles en pu. Toute intégrale elliptique se ramène donc à la forme

$$\int (A + Bp'u)\,du = \int A\,du + \int Bp'u\,du.$$

Si, dans la seconde de ces intégrales, on pose

$$pu = z,$$

d'où

$$p'u\,du = dz,$$

elle est immédiatement ramenée à la forme

$$\int f(z)\,dz,$$

dans laquelle $f(z)$ est une fraction rationnelle; on sait donc l'intégrer. Le résultat est une fonction rationnelle de z, ou de pu, c'est-à-dire une fonction elliptique.

Restent les intégrales du type

$$\int A\,du,$$

qui peuvent, par des opérations algébriques (décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples), se ramener aux deux types suivants :

$$\int p^m u\,du \quad \text{et} \quad \int \frac{du}{(pu - pv)^m}.$$

Nous avons vu, pages 48 et suivantes, qu'on pouvait toujours exprimer $p^m u$ en fonction linéaire de pu et de ses dérivées. En intégrant, on trouvera donc une fonction linéaire de ζu, ainsi que de pu et de ses dérivées.

Il reste à intégrer les expressions de la forme

$$\int \frac{du}{(pu - pv)^m}.$$

Deux cas sont à distinguer :

Premier cas : *v est une demi-période.* — Alors la formule (59) permet de remplacer la fraction $\frac{1}{pu - p\omega_\alpha}$ par le polynome

$$\frac{1}{(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)}[p(u + \omega_\alpha) - e_\alpha],$$

et, par conséquent, l'intégration est ramenée à celle des polynomes en pu, intégration qu'on sait effectuer.

Deuxième cas : *v n'est pas une demi-période.* — Supposons d'abord que m soit égal à l'unité; la formule (39 *bis*) donne immédiatement la solution. Elle s'écrit, en mettant pu au lieu

de $-\zeta' u$,

$$(a) \qquad \frac{1}{pu - pv} = -\frac{1}{p'v}[\zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta v];$$

d'où

$$\int \frac{du}{pu - pv} = -\frac{1}{p'v}\log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)} + 2\frac{u\zeta v}{p'v}.$$

En différentiant plusieurs fois par rapport à v la formule (a), on introduira les fractions

$$\frac{1}{(pu - pv)^2}, \quad \frac{1}{(pu - pv)^3}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{(pu - pv)^m}.$$

Réduction aux fonctions elliptiques ou inversion. — Nous venons de voir comment s'intégraient les intégrales portant sur des fonctions elliptiques; mais il faut encore savoir introduire ces fonctions elliptiques ou, comme l'on dit, effectuer l'*inversion;* sans entrer ici dans la discussion générale, j'indiquerai quelques cas généraux.

Le cas le plus simple est évidemment celui où l'on a à effectuer une quadrature telle que

$$y = \int R(z, \sqrt{Z})\, dz,$$

le signe R désignant une fonction rationnelle et Z le polynome $4z^3 - g_2 z - g_3$; il suffit alors de poser

$$z = pu;$$

il en résulte

$$dz = p'u\, du,$$

$$\sqrt{Z} = p'u,$$

et l'on est ramené au problème précédemment traité.

Cas particulier :

$$y = \int \frac{dz}{a\sqrt{Z}},$$

y se transforme en

$$\int \frac{du}{a},$$

d'où

$$y = \frac{u}{a} + c, \qquad z = p\, a(y - c).$$

Cette dernière équation résout le problème.

Si Z désigne un polynome quelconque du troisième degré, $a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$, on revient au cas précédent, en posant

$$z = -\frac{a_1}{3a_0} + \zeta \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{a_0}},$$

ce qui fait disparaître le terme en z^2 et donne à ζ^3 le coefficient 4.

Supposons maintenant qu'on rencontre une intégrale de la forme

$$\int R(x, \sqrt{X})\, dx = \sum \int \frac{P}{Q\sqrt{X}}\, dx,$$

P, Q, R désignant toujours des fonctions rationnelles et X un polynome du quatrième degré en x.

Cas particulier. — Supposons d'abord X bicarré,

$$X = mx^4 + nx^2 + p;$$

on posera

$$x^2 = y$$

ou

$$x^2 = \frac{1}{z};$$

et l'on aura

$$2x\, dx = dy, \qquad dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$$

ou

$$2x\, dx = -\frac{dz}{z^2}, \qquad dx = -\frac{dz}{2z\sqrt{z}},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{2\sqrt{(my^2 + ny + p)y}}$$

ou

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{-dz}{2\sqrt{z(m + nz + pz^2)}}.$$

Les deux procédés nous ramènent au troisième degré.

Il faut remarquer le cas particulier suivant : soit à calculer

$$\gamma = \int \frac{dx}{a\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}};$$

si l'on pose

$$x = \operatorname{sn} u,$$

l'équation précédente devient

$$y = \int \frac{du}{a},$$

d'où

$$y = \frac{u}{a} + c,$$

et

$$x = \operatorname{sn} a(y - c)$$

représente l'intégrale de l'équation donnée.

Voici maintenant des méthodes plus générales :

Première méthode. — *a*. On connaît une racine α de X

$$X = (x - \alpha)(a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3);$$

on pose

$$x - \alpha = \frac{1}{y}, \qquad \text{d'où} \qquad x = \alpha + \frac{1}{y}$$

et

$$\sqrt{X} = \frac{1}{y^2}\sqrt{a_0(\alpha y + 1)^3 + a_1(\alpha y + 1)^2 y + a_2(\alpha y + 1)y^2 + a_3(\alpha y + 1)^3};$$

on est ramené au cas du troisième degré, déjà traité.

b. On connaît deux racines α et β de X; on peut alors, soit opérer comme dans le cas précédent, soit poser

$$x - \alpha = (x - \beta)z,$$

et si

$$X = (x - \alpha)(x - \beta)(ax^2 + bx + c),$$

on obtiendra encore sous le radical un polynome du troisième degré. En effet, on aura

$$x = \frac{\alpha + \beta z}{1 + z},$$

$$\sqrt{X} = \frac{x - \beta}{1 + z}\sqrt{z[a(\alpha + \beta z)^2 + b(1 + z)(\alpha + \beta z) + c(1 + z)^2]}.$$

Deuxième méthode. — On se propose de ramener X à la forme bicarrée pour rentrer dans le premier cas traité. Pour cela, on décompose X en deux facteurs réels du second degré

$$X = (ax^2 + bx + c)(a'x^2 + b'x + c').$$

Si

$$a'x^2 + b'x + c' = \lambda(ax^2 + bx + c''),$$

la substitution

$$x + \frac{b}{a} = y$$

suffit pour obtenir la forme bicarrée.

Si l'on n'est pas dans ce cas particulier, on pose

$$x = \frac{\alpha y + \beta}{y + 1},$$

et l'on détermine les constantes α et β, de manière à annuler le coefficient de y dans chacun des trinomes. Le premier devient, après multiplication par $(y+1)^2$,

$$a(\alpha y + \beta)^2 + b(\alpha y + \beta)(y + 1) + c(y + 1)^2,$$

et la condition qui le concerne s'écrit

$$2a\alpha\beta + b(\beta + \alpha) + 2c = 0.$$

Le second trinome donne de même

$$2a'\alpha\beta + b'(\beta + \alpha) + 2c' = 0,$$

et ces deux équations détermineront les constantes de la substitution; α, β se présentent comme racines de l'équation du second degré

$$(ab' - ba')\lambda^2 - 2(ac' - ca')\lambda + bc' - cb' = 0.$$

On peut toujours s'arranger de manière que ces racines soient réelles; car le discriminant de cette équation, changé de signe,

$$(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb')$$

est le résultant des deux trinomes $ax^2 + bx + c$, $a'x^2$ [illegible]
et l'on sait qu'il est toujours positif à moins q[illegible]
deux trinomes ne soient réelles et enchevêtrées [illegible] egré.
éviter en choisissant convenablement les racin[illegible] it à calculer
nome. On sera donc ramené, par des substitut[illegible]
expression sous le radical de la forme

$$(My^2 + N)(M'y^2 + N'),$$

c'est-à-dire à un polynome bicarré.

Troisième méthode. — L'inconvénient des méthodes précédentes est de supposer effectuée la résolution de l'équation $X = 0$. Bien que, la plupart du temps, cette circonstance se présente, il peut être utile d'indiquer une méthode qui n'exige pas la résolution de l'équation du quatrième degré.

Nous nous appuierons sur l'identité suivante, que nous nous bornerons à vérifier

$$(b)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{1}{4}\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2-3pv\right]^2+2\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}p'v-p''v\right)\\ &\quad=[p(u+v)-pu]^2.\end{aligned}\right.$$

La formule d'addition (57) donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left(\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2-3pv&=p(u+v)+pu-2pv\\ &=p(u+v)-pv+pu-pv.\end{aligned}$$

D'autre part, en remplaçant successivement $2p''v$ par $12p^2v-g_2$ et p'^2 par $4p^3-g_2p-g_3$, le second terme de l'identité (b) peut s'écrire

$$\begin{aligned}&\frac{-p'^2u+2p'up'v-p'^2v+p'^2u-p'^2v}{pu-pv}-12p^2v+g_2\\ &=-\frac{(p'u-p'v)^2}{pu-pv}+\frac{4(p^3u-p^3v)-g_2(pu-pv)}{pu-pv}-12p^2v+g_2\\ &=-4(pu-pv)[p(u+v)+pu+pv]+4(p^2u+pupv+p^2v)-12p^2v\\ &=-4(pu-pv)p(u+v)-4pv(pu-pv),\\ &=-4(pu-pv)[p(u+v)-pv].\end{aligned}$$

L'identité à vérifier devient ainsi

$$[\overline{p(u+v)-pv}+\overline{pu-pv}]^2-4(pu-pv)[p(u+v)-pv]=[p(u+v)-pu]^2,$$

s cette forme elle est évidente.

la posé, soit

$$y=\frac{1}{2}\,\frac{p'u-p'v}{pu-pv};$$

$X =$

l'identité (b) peut s'écrire

$$(d)\qquad \begin{cases} \mathrm{p}(u+v)-\mathrm{p}u=\sqrt{(y^2-3\mathrm{p}v)^2+2y\,\mathrm{p}'v-\mathrm{p}''v)}, \\ \mathrm{p}(u+v)-\mathrm{p}u=\sqrt{\mathrm{Y}}, \end{cases}$$

en posant

$$\mathrm{Y}=y^4-6y^2\,\mathrm{p}v+4y\,\mathrm{p}'v+9\mathrm{p}^2v-2\mathrm{p}''v.$$

On saura donc, par les égalités (c) et (d), ramener aux fonctions elliptiques toute intégrale de la forme

$$\int \mathrm{R}(y,\sqrt{\mathrm{Y}})\,dy.$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$\int \mathrm{R}(z,\sqrt{\mathrm{Z}})\,dz,$$

où Z est un polynome du quatrième degré. C'est un problème élémentaire que de poser $z=\alpha y+\beta$ et de déterminer α et β, de manière que le nouveau polynome en y ait pour premier coefficient l'unité et soit privé de second terme. Supposons donc fait ce calcul et l'intégrale sous la forme

$$\int \mathrm{R}(y,\sqrt{\mathrm{Y}})\,dy$$

avec

$$\mathrm{Y}=y^4+6a_2y^2+4a_3y+a_4.$$

Tout le problème revient à identifier ce polynome avec le précédent polynome Y, et la réussite ne fera pas de doute lorsque l'on réfléchira que nous aurons trois équations d'identification et trois inconnues, savoir g_2, g_3, qui déterminent la fonction $\mathrm{p}u$, et l'argument particulier v. Voici le calcul :

$$a_2=-\mathrm{p}v,$$
$$a_3=\mathrm{p}'v,$$
$$a_4=+9\mathrm{p}^2v-2\mathrm{p}''v=-3\mathrm{p}^2v+g_2.$$

On en déduit immédiatement

$$(e)\qquad g_2=a_4+3a_2^2,$$

et en portant $p v$ et $p' v$ dans l'équation

$$p'^2 v = 4 p^3 v - g_2 p v - g_3,$$

$$a_3^2 = -4 a_2^3 + (a_4 + 3 a_2^2) a_2 - g_3,$$

$$(f) \qquad g_3 = a_2 a_4 - a_3^2 - a_2^3 \quad (^1).$$

La fonction $p u$ étant ainsi construite, l'argument v sera donné par l'égalité

$$(g) \qquad p v = -a_2,$$

et l'équation, concordant avec la précédente,

$$(h) \qquad p' v = a_3$$

servira à fixer le signe de v.

Remarque. — Toutes les intégrales que nous venons de rencontrer sont celles qu'on appelle *elliptiques,* c'est-à-dire qu'elles ne portent que sur des quantités rationnelles et sur des radicaux où sont enfermés des polynomes du troisième ou du quatrième degré. On voit que les intégrales elliptiques s'intègrent toujours par les fonctions elliptiques. D'autres problèmes se ramènent aux mêmes fonctions; sans entrer dans le détail, je me bornerai à énoncer ce théorème :

On peut exprimer par les fonctions elliptiques toute intégrale de la forme $\int \mathcal{R}(u, v)\, du$, $\mathcal{R}(u, v)$ *étant une fonction rationnelle en u et en v, lorsque v est reliée à u par une relation de genre* UN, *c'est-à-dire lorsque la courbe* $f(u, v) = 0$ *a son maximum de points doubles sauf* un.

---

(1) Les valeurs trouvées pour g_2 et g_3 sont, à un facteur près, les invariants du polynome du quatrième degré Y; si l'on appelle ces invariants S et T,

$$S = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2,$$

$$T = a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_3^2 a_0 - a_1^2 a_4,$$

les valeurs de g_2 et g_3 en fonction des coefficients de Z seront

$$g_2 = \frac{S}{a_0^2}, \qquad g_3 = \frac{T}{a_0^3}.$$

Application : nouvelle démonstration de la relation entre $\wp u$ et $\operatorname{sn} u$. — Partons de l'intégrale

$$(i) \qquad u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

qui définit la fonction $x = \operatorname{sn} u$, et appliquons les règles précédentes pour introduire la fonction $\wp u$, c'est-à-dire pour remplacer le radical précédent par un radical du troisième degré. Pour cela, posons, λ étant une constante positive, en même temps que la nouvelle variable t,

$$(j) \qquad x^2 = \frac{\lambda}{t};$$

d'où

$$dx = -\frac{\sqrt{\lambda}\,dt}{2t\sqrt{t}},$$

$$u = \int_t^\infty \frac{\sqrt{\lambda}\,dt}{2\sqrt{(t-\lambda)(t-\lambda k^2)}\,t}.$$

Posons alors

$$(k) \qquad t = z - \frac{\lambda(1+k^2)}{3},$$

$$e_1 = \lambda\frac{4+k^2}{3},$$

$$e_3 = \lambda\frac{4k^2+1}{3},$$

$$e_2 = \lambda\frac{1+k^2}{3} \qquad (e_1 > e_3 > e_2),$$

$$Z = 4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3);$$

on déduit de là

$$(l) \qquad \begin{cases} \lambda = e_1 - e_2, \\ k^2 = \dfrac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2} \end{cases}$$

et

$$u = \int_z^\infty \frac{\sqrt{\lambda}\,dz}{\sqrt{Z}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{u}{\sqrt{\lambda}} = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{Z}}.$$

Il suffit de poser

$$z = \wp\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}};\, e_1,\, e_2,\, e_3\right)$$

pour avoir retrouvé toutes les formules du Chapitre précédent :

(46′), (62) et (63). En effet, en tirant z de (k) et utilisant (j), on a

$$z = p\frac{u}{\sqrt{\lambda}} = e_2 + \frac{e_1 - e_2}{\operatorname{sn}^2 u}.$$

Remarque. — Nous avons posé $x^2 = \frac{\lambda}{t}$ et non $\frac{1}{t}$, parce que la fonction pu dépend de deux constantes arbitraires, tandis que l'équation (i) n'en contenait qu'une; la quantité λ ainsi introduite s'appelle le *multiplicateur* des fonctions elliptiques.

Des diverses espèces d'intégrales elliptiques. — On démontre dans les Cours d'Analyse que toutes les intégrales elliptiques peuvent s'exprimer au moyen de trois seulement, X étant un polynome du quatrième degré,

$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ qu'on appelle *intégrale elliptique de première espèce,*

$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}}$ qu'on appelle *intégrale elliptique de deuxième espèce,*

$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}}$ qu'on appelle *intégrale elliptique de troisième espèce.*

Cette classification a beaucoup perdu de son intérêt, d'après ce qui précède, puisque nous savons toujours introduire la fonction pu et par suite ramener à des quadratures portant sur des fonctions elliptiques; elle nous sera cependant commode comme langage, et nous la conserverons.

Des intégrales complètes de Legendre. — Nous avons déjà rencontré (68) une des intégrales que Legendre a appelées *intégrales complètes,* et nous avons pu prévoir son importance, puisqu'elle est le quart d'une des périodes de $\operatorname{sn} u$: c'est l'*intégrale complète de première espèce*

$$(68) \qquad K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Legendre pose

$$x = \sin\varphi,$$
$$k = \sin\theta,$$

et la formule précédente devient

$$(70)\qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\theta \sin^2\varphi}}.$$

En même temps que l'intégrale complète précédente, nous avons rencontré l'intégrale complète relative au module complémentaire k'

$$(71)\qquad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k'^2 x^2)}}.$$

On sait que $4K$ et $2iK'$ sont les périodes de $\operatorname{sn} u$. Legendre a construit des Tables de l'intégrale complète de première espèce pour toutes les valeurs de θ de degré en degré.

Les intégrales complètes de seconde espèce sont définies par les formules

$$(72)\qquad \left\{\begin{aligned} E &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = \int_0^1 \frac{dx\sqrt{1 - k^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}, \\ E' &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - k'^2 \sin^2\varphi} = \int_0^1 \frac{dx\sqrt{1 - k'^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}\right.$$

Legendre a également construit les Tables de ces fonctions. Nous donnons un abrégé de ces deux Tables à la fin du Volume.

Nous verrons dans le Chapitre suivant comment ces nouvelles quantités se rattachent à η_1 et à η_2 et comment il en résulte une importante relation entre K, K', E, E'. Je me bornerai à donner ici cette relation, en laissant la démonstration directe comme exercice au lecteur,

$$(73)\qquad KE' + K'E - KK' = \frac{\pi}{2}.$$

Exercices sur le Chapitre V.

1. Démontrer directement la formule (73)

$$KE' + K'E - KK' = \frac{\pi}{2}.$$

Il suffit de montrer que la dérivée du premier membre par rapport à k est nulle et d'examiner un cas particulier (LEGENDRE, *Exercices de Calcul intégral*, t. I, p. 61).

2. Démontrer que, si $k + k' = 1$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\cos^2\varphi + k'\cos^2\psi}{\sqrt{1 - k\sin^2\varphi}\sqrt{1 - k'\sin\varphi^2}}\, d\varphi\, d\psi = \frac{\pi}{2}.$$

En déduire la formule (73).

3. Démontrer que

$$\int \frac{z + 3m}{z\sqrt{4z^3 - 4(z+m)^2}}\, dz = \arcsin \frac{\sqrt{z^3 - (z+m)^2}}{z^{\frac{3}{2}}}.$$

L'intégrale est donc pseudo-elliptique. (GREENHILL, p. 347.)

4. Démontrer que

$$\int \frac{1}{2}\, \frac{x - z}{(x+z)\sqrt{4z(z+x)^2 - z^2}}\, dz = \arcsin \frac{\sqrt{z}}{2(z+x)}.$$

(GREENHILL, p. 355.)

5. Intégrer $\frac{1}{pu}$, $\frac{1}{p^2 u}$, $\frac{1}{p^3 u}$.

6. Démontrer que

$$\int \frac{du}{p'u + \sqrt{3}} = \frac{1}{6} u\sqrt{3} - \frac{1}{12} \mathrm{L}\, p\left(u - \frac{2}{3}\omega_2\right) - \frac{1}{18}\sqrt{3} \operatorname{arc\,tang} p'\left(u - \frac{2}{3}\omega_2\right),$$

en supposant $g_2 = 0$, $g_3 = 1$.

CHAPITRE VI.

PREMIÈRE MÉTHODE DE CALCUL : USAGE DES TABLES. — CALCUL DES PÉRIODES ω_1, ω_2 ET DES INTÉGRALES COMPLÈTES η_1, η_2 : 1° CAS DU DISCRIMINANT POSITIF; 2° CAS DU DISCRIMINANT NÉGATIF. CALCUL DE $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, pu, ζu. PROBLÈMES INVERSES [FORMULES (75) A (83 *bis*)].

Ainsi que nous l'avons vu dans le Chapitre précédent, les fonctions elliptiques s'introduisent dans l'intégration d'expressions qui, outre des fonctions rationnelles, contiennent des radicaux portant sur des polynomes du troisième et du quatrième degré; nous avons vu de plus que tout se ramène, en dernière analyse, à des radicaux où le polynome est du troisième degré et de la forme $4z^3 - g_2 z - g_3$. On est amené alors à poser $z = pu$ et les questions sont ramenées à étudier des fonctions pu, ζu ou σu; pour cela, il importe avant tout de savoir, connaissant g_2 et g_3, calculer les périodes réelles ω_1 et ω_2 ainsi que η_1 ou η_2. C'est à ce calcul que nous consacrerons la première partie du Chapitre.

Discriminant Δ *positif;* $\qquad g_2^3 - 27 g_3^2 > 0.$

Calcul de ω_1 et ω_2. — Les valeurs de ω_1 et de ω_2 résultent immédiatement des formules des deux Chapitres précédents; résumons-les. Si e_1, e_2, e_3 sont les trois racines, supposées réelles, du polynome

$$4z^3 - g_2 z - g_3 \qquad (e_1 > e_3 > e_2),$$

nous avons posé

$$(62) \qquad \sin^2\theta = k^2 = \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2}, \qquad \cos^2\theta = k'^2 = \frac{e_1 - e_3}{e_1 - e_2},$$

$$(46') \qquad \lambda = e_1 - e_2,$$

$$(70) \qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\theta \sin^2\varphi}}, \qquad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \cos^2\theta \sin^2\varphi}},$$

et les valeurs des périodes découlent des formules (48) ou (48′)

$$\omega_1 = \frac{K}{\sqrt{\lambda}}, \qquad \omega_2 = \frac{iK'}{\sqrt{\lambda}}.$$

Le lecteur trouvera à la fin du Volume (Table I) les valeurs de K avec cinq décimales pour toutes les valeurs de θ, de degré en degré.

Calcul de η_1 et de η_2. — Je partirai de la formule suivante, dans laquelle figure en apparence un élément ω_2 imaginaire, mais dans laquelle au fond la variable u et la fonction sont également réelles [*voir* variation de pu (*fig.* 3)]. L'intégrale prise entre des limites réelles est donc parfaitement déterminée

$$(a) \qquad \eta_1 = -\int_0^{\omega_1} p(u+\omega_2)\,du.$$

Cette égalité se démontre aisément; car

$$\begin{aligned}\int_0^{\omega_1} p(u+\omega_2)\,du &= -[\zeta(u+\omega_2)]_0^{\omega_1}\\ &= -\zeta(\omega_1+\omega_2)+\zeta(\omega_2)\\ &= \zeta\omega_3+\zeta\omega_2 = \eta_3+\eta_2 = -\eta_1.\end{aligned}$$

La relation (59), déjà si souvent employée, nous amène à écrire, λ et k conservant leur signification ordinaire,

$$p(u+\omega_2) = e_2 + \frac{(e_1-e_2)(e_3-e_2)}{pu-e_2} = e_2 + \frac{\lambda^2k^2}{z-e_2},$$

et la variable $z = pu$ décroîtra de ∞ à e_1, lorsque u croîtra de o à ω_1 : $p'u$ sera négative et l'on aura

$$dz = p'u\,du = -2\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}\,du.$$

Par suite, en se reportant à la formule (a),

$$(b) \qquad \begin{cases} \eta_1 = +\displaystyle\int_\infty^{e_1}\left(e_2+\frac{\lambda^2k^2}{z-e_2}\right)\frac{dz}{2\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}},\\ \eta_1 = \displaystyle\int_\infty^{e_1} e_2\frac{dz}{\sqrt{Z}} + \lambda^2k^2\int_\infty^{e_1}\frac{dz}{(z-e_2)\sqrt{Z}}.\end{cases}$$

La première intégrale est donnée par la formule (66); elle a pour valeur $-\omega_1 e_2$. Il s'agit d'exprimer la seconde; pour cela, nous allons introduire la fonction complète de deuxième espèce de Legendre, c'est-à-dire, au fond, revenir aux fonctions elliptiques de Jacobi. La transformation indiquée est donc, comme dans la formule (63 *bis*),

$$z = e_2 + \frac{\lambda}{x^2}, \qquad \lambda = e_1 - e_2,$$

et x variera de 0 à 1 lorsque z décroîtra de ∞ à e_1. Voici le calcul :

$$z - e_2 = \frac{\lambda}{x^2},$$

$$z - e_1 = \frac{\lambda}{x^2} - \lambda = \lambda \frac{1 - x^2}{x^2},$$

$$z - e_3 = \frac{\lambda}{x^2} - (e_3 - e_2) = \lambda \frac{1 - k^2 x^2}{x^2},$$

$$dz = -2 \frac{\lambda\, dx}{x^3}.$$

Le second terme de η_1 devient donc

$$-\sqrt{\lambda}\, k^2 \int_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

Il peut s'écrire

$$+\sqrt{\lambda}\left[\int_0^1 \frac{dx\sqrt{1 - k^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} - \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}\right]$$

ou

$$\sqrt{\lambda}\,(\mathrm{E} - \mathrm{K}).$$

Par suite,

$$\eta_1 = -\omega_1 e_2 + \sqrt{\lambda}\,(\mathrm{E} - \mathrm{K}) = -\frac{\mathrm{K}}{\sqrt{\lambda}}\, e_2 + \sqrt{\lambda}\,(\mathrm{E} - \mathrm{K}),$$

ou enfin

$$(7[illegible]) \qquad \eta_1 = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{E} - \frac{\mathrm{K} e_1}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{e_1 - e_2}\left(\mathrm{E} - \frac{e_1 \mathrm{K}}{e_1 - e_2}\right).$$

[illegible] généité (67) va n[illegible] permettre de rattacher [illegible] fait pour ω_2 et η_2. Intégrons-la par rapport

à u; elle devient

$$(76)\qquad (\zeta u;\, g_2,\, g_3) = \sqrt{\mu}\,\zeta\left(u\sqrt{\mu};\, \frac{g_2}{\mu^2},\, \frac{g_3}{\mu^3}\right);$$

la constante d'intégration est nulle parce que les deux membres pour u infiniment petit ont comme valeur principale $\frac{1}{u}$. Dans l'équation précédente faisons $\mu = -1$; elle devient

$$(c)\qquad \zeta(u;\, g_2,\, g_3) = i\,\zeta(ui;\, g_2,\, -g_3).$$

Par l'addition de $2\omega_2$, le premier membre se trouve augmenté de $2\eta_2$; il en est donc de même du second; ui est augmenté de $2\omega_2 i$, et l'on a

$$\zeta(ui + 2\omega_2 i;\, g_2,\, -g_3) = \zeta(ui;\, g_2,\, -g_3) + \frac{2\eta_2}{i}$$

ou, en revenant aux notations de la page 60,

$$\zeta(v - 2v_2;\, g_2,\, -g_3) = \zeta(v;\, g_2,\, -g_3) + \frac{2\eta_2}{i}.$$

Mais, $2v_2$ étant la période réelle de $\wp(v;\, g_2,\, -g_3)$, on a aussi

$$\zeta(v - 2v_2;\, g_2,\, -g_3) = \zeta(v;\, g_2,\, -g_3) - 2\eta,$$

2η jouant, vis-à-vis de cette fonction $\zeta(v;\, g_2,\, -g_3)$, le rôle de $2\eta_1$ vis-à-vis de $\zeta(u;\, g_2,\, g_3)$. Donc

$$\frac{2\eta_2}{i} = -2\eta$$

ou

$$\eta_2 = -\eta i.$$

Mais nous venons d'apprendre à calculer η; on a, toujours en conservant les notations de la page 60,

$$\eta = \sqrt{e'_2 - e'_1}\left(E' - \frac{e'_2 K'}{e'_2 - e'_1}\right),$$

$$\eta = \sqrt{e_1 - e_2}\left(E' + \frac{e_2 K'}{e_1 - e_2}\right),$$

et enfin

$$(77)\qquad \eta_2 = -i\sqrt{e_1 - e_2}\left(E' + \frac{e_2 K'}{e_1 - e_2}\right).$$

Cette formule, jointe à la formule (75), permettra de calculer les deux constantes η_1, η_2. La Table I, que nous avons mise à la fin du Volume, donne les valeurs de l'intégrale de deuxième espèce E pour toutes les valeurs de l'angle θ de degré en degré.

Corollaire. — Portons les valeurs qui viennent d'être obtenues pour ω_1, ω_2, η_1, η_2 dans l'équation (25); elle devient

$$\frac{K'i}{\sqrt{e_1-e_2}}\sqrt{e_1-e_2}\left(E-\frac{e_1K}{e_1-e_2}\right)+i\sqrt{e_1-e_2}\left(E'+\frac{e_2K'}{e_1-e_2}\right)\frac{K}{\sqrt{e_1-e_2}}=\frac{\pi i}{2}$$

ou

$$K'E+KE'-KK'=\frac{\pi}{2}.$$

C'est la formule que nous avions annoncée sous le numéro (73).

Cas du discriminant négatif; $(g_2^3-27g_3^2<0)$.

Calcul des périodes ω_1, ω_2. — Supposons maintenant que les racines de Z ne soient pas réelles toutes les trois et rappelons que nous avons alors désigné par e_1 la racine réelle.

La transformation indiquée dans le cas du discriminant positif ne peut servir ici et il faut procéder autrement.

Rappelons les formules (66) et (66')

$$(66)\qquad \omega_1=\int_{e_1}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}=\int_{e_1}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{Z}},$$

$$(66')\qquad \frac{\omega_2}{i}=\int_{-e_1}^{\infty}\frac{dy}{\sqrt{4y^3-g_2y+g_3}}=\int_{-e_1}^{\infty}\frac{dy}{\sqrt{Y}};$$

et soit

$$(d)\qquad Z=4(z-e_1)[(z-m)^2+n^2]=4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)=\varphi(z);$$

d'où

$$(e)\qquad m=-\frac{1}{2}e_1,\qquad n^2=\frac{g_3}{4e_1}-\frac{e_1^2}{4}.$$

Posons

$$(f)\quad H^2=(m-e_1)^2+n^2=(e_1-e_2)(e_1-e_3)=\frac{9e_1^2}{4}+n^2=\frac{1}{4}\varphi'(e_1)$$

et faisons, dans la première intégrale,

$$(g)\qquad z=e_1+H\tang^2\frac{\varphi}{2};$$

d'où

$$dz = \mathrm{H}\tang\frac{\varphi}{2}\frac{d\varphi}{\cos^2\frac{\varphi}{2}},$$

$$\omega_1 = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}\sqrt{\mathrm{H}\left(1+\tang^4\frac{\varphi}{2}\right)-2(m-e_1)\tang^2\frac{\varphi}{2}}},$$

$$(h)\qquad \omega_2 = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{2\sqrt{\mathrm{H}}\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi}}$$

avec

$$(i)\qquad k_1^2 = \frac{\mathrm{H}+m-e_1}{2\mathrm{H}} = \frac{1}{2} - \frac{3e_1}{4\mathrm{H}}.$$

Il résulte de la valeur de H que k_1^2 est toujours positif et plus petit que l'unité; l'intégrale

$$(j)\qquad \mathrm{K}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi}}$$

est donc bien déterminée, et l'on a

$$(78)\qquad \omega_1 = \frac{\mathrm{K}_1}{\sqrt{\mathrm{H}}}.$$

Pour calculer $\frac{\omega_2}{i}$, je remarque que

$$\mathrm{Y} = 4(y+e_1)(y+e_2)(y+e_3) = 4(y+e_1)[(y+m)^2+n^2],$$

m et n ayant les mêmes significations que plus haut. Je poserai alors

$$y = -e_1 + \mathrm{H}\tang^2\frac{\varphi}{2};$$

d'où

$$dy = \mathrm{H}\tang\frac{\varphi}{2}\frac{d\varphi}{\cos^2\frac{\varphi}{2}},$$

$$\frac{\omega_2}{i} = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}\sqrt{\mathrm{H}\left(1+\tang^4\frac{\varphi}{2}\right)+2(m-e_1)\tang^2\frac{\varphi}{2}}}$$

$$= \int_0^\pi \frac{d\varphi}{2\sqrt{\mathrm{H}}\sqrt{1-k_1'^2\sin^2\varphi}}$$

avec

$$(k) \qquad k_1'^2 = \frac{H - m + e_1}{2H} = \frac{1}{2} + \frac{3e_1}{4H} = 1 - k_1^2.$$

Donc enfin

$$(78\ bis) \qquad \omega_2 = \frac{iK_1'}{\sqrt{H}},$$

en posant

$$(l) \qquad K_1' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1'^2 \sin^2\varphi}}.$$

Remarque importante. — Il résulte, soit de ce qui précède, soit de la variation de pu (*fig.* 1 et 5), que

$$(79) \qquad p\omega_1 = p\omega_2 = e_1,$$

et cette constatation suffit à montrer que $2\omega_1$ et $2\omega_2$ ne constituent pas ici un couple de périodes primitives. Une vérification va le prouver de nouveau.

Nous avons vu [équat. (59)] que

$$p(u + \omega_1) - e_1 = \frac{(e_2 - e_1)(e_3 - e_1)}{pu - e_1};$$

on a aussi, puisque $p\omega_2 = e_1$,

$$p(u + \omega_2) - e_1 = \frac{(e_2 - e_1)(e_3 - e_1)}{pu - e_1};$$

donc

$$p(u + \omega_2) = p(u + \omega_1).$$

Soit fait dans cette équation d'abord $u = v + \omega_2$, d'où

$$p(v + 2\omega_2) = pv = p(v + \omega_1 + \omega_2),$$

puis, $u = v - \omega_2$, d'où

$$pv = p(v + \omega_1 - \omega_2);$$

on voit que $\omega_1 + \omega_2$ et $\omega_1 - \omega_2$ sont deux périodes imaginaires conjuguées; et par suite, la fonction pu, constituée ici avec les périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$, admet non seulement les périodes $2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$, mais encore $(2m_1 + 1)\omega_1 + (2m_2 + 1)\omega_2$.

Nous allons vérifier que

$$p\frac{\omega_1+\omega_2}{2}=e_3 \qquad \text{et} \qquad p\frac{\omega_1-\omega_2}{2}=e_2,$$

en nous appuyant sur les formules de l'exercice 10 du Chapitre IV.

La formule d'addition de pu donne

$$\begin{aligned}
p\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right) &= \frac{1}{4}\left(\frac{p'\frac{\omega_1}{2}-p'\frac{\omega_2}{2}}{p\frac{\omega_1}{2}-p\frac{\omega_2}{2}}\right)^2 - p\frac{\omega_1}{2}-p\frac{\omega_2}{2}\\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{-4(p^2+q^2)(p-iq)}{2(p^2+q^2)}\right]^2 - 2e_1\\
&= (p-iq)^2-2e_1=(p+iq)^2-4ipq-2e_1\\
&= e_1-e_3-2e_1-4ipq;
\end{aligned}$$

or, l'égalité qui définit p et q donne, par l'élévation au carré,

$$e_1-e_3=e_1-m+ni=p^2-q^2+2ipq;$$

d'où

$$2pq=n$$

et, pour la quantité conjuguée,

$$e_1-e_2=e_1-m-ni=e_1-m-2ipq.$$

En retranchant, on trouve

$$e_2-e_3=4ipq.$$

Donc enfin

$$(m) \qquad p\frac{\omega_1+\omega_2}{2}=e_1-e_3-2e_1+e_3-e_2=-e_1-e_2=e_3.$$

Le changement de i en $-i$ donne immédiatement

$$(n) \qquad p\frac{\omega_1-\omega_2}{2}=e_2.$$

Nous poserons par la suite

$$(o) \qquad \begin{cases} \omega'=\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2},\\[2mm] \omega''=\dfrac{\omega_1-\omega_2}{2}.\end{cases}$$

Deuxième remarque. — Dans le calcul qui vient d'être fait

pour obtenir ω_1, on aurait pu ne mettre la limite inférieure e_1 dans l'intégrale qu'à la fin; à la place de (66), on aurait eu

$$u = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{Z}} \qquad \text{ou} \qquad z = pu;$$

à la place de l'équation (h),

$$u = \frac{1}{2\sqrt{H}} \int_\varphi^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2\varphi}} \qquad \text{ou} \qquad \pi - \varphi = \operatorname{sn} 2u\sqrt{H}.$$

La formule (g) devient alors

$$(80) \qquad pu = e_1 + H\frac{1 + \operatorname{cn} 2u\sqrt{H}}{1 - \operatorname{cn} 2u\sqrt{H}}.$$

Calcul de η_1 et de η_2. — On vient de voir que les véritables périodes principales, dans le cas du discriminant négatif, sont, non pas ω_1 et ω_2, mais les quantités que nous avons appelées ω' et ω''. Appelons η' et η'' les accroissements correspondants de ζu, c'est-à-dire que

$$(p) \qquad \begin{cases} \zeta(u + 2\omega') = \zeta u + 2\eta', \\ \zeta(u + 2\omega'') = \zeta u + 2\eta'', \end{cases}$$

Ces deux nouvelles constantes sont évidemment imaginaires conjuguées, et l'on aura

$$(q) \qquad \begin{cases} \eta_1 = \eta' + \eta'', \\ \eta_2 = \eta' - \eta'', \end{cases}$$

η_1 étant réelle et η_2 purement imaginaire. Ces deux formules sont les analogues des formules (o).

La formule qui peut servir de définition à $pu = z$,

$$\zeta u = -\int pu\, du = -\int \frac{z\, dz}{\sqrt{Z}}$$

a besoin d'être expliquée, si pu est imaginaire. Sans examiner le cas général, je considérerai l'intégrale

$$-\int_{e_2}^{e_3} \frac{z\, dz}{\sqrt{Z}} = -\int_{e_2}^{e_3} \frac{z\, dz}{2\sqrt{(z - e_1)[(z - m)^2 + n^2]}}$$

analogue à celle qui a donné η_1 dans le cas du discriminant positif. Les limites de z étant

$$e_2 = m + ni,$$

$$e_3 = m - ni, \qquad n > 0,$$

d'où

$$e_1 = -2m;$$

il suffira de poser

$$z = m - it$$

et de faire varier t de $-n$ à $+n$. Le coefficient différentiel $\frac{z\,dz}{\sqrt{Z}}$ pouvant être mis sous la forme $dA + i\,dB$ (A et B réels), l'intégrale à calculer se trouve ramenée à la somme de deux intégrales

$$\int dA \quad \text{et} \quad \int dB,$$

où la variable t est réelle. Elle est donc bien définie, au moins dans les mêmes conditions que toute intégrale réelle, c'est-à-dire si le coefficient différentiel ne devient pas infini dans les limites de l'intégration. Maintenant, quelle sera la quantité calculée? On a vu que $pu = z$ prend la valeur e_3 si $u = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega'$, et la valeur e_2 si $u = \omega''$; en même temps, ζu prend les valeurs η' et η''; le résultat sera donc

$$\zeta\omega' - \zeta\omega'' = \eta' - \eta'' = \eta_2,$$

et nous pourrons poser

$$\eta_2 = -\int_{e_2}^{e_3} \frac{z\,dz}{\sqrt{Z}} = +\int_{-n}^{+n} \frac{(m - it)\,i\,dt}{2\sqrt{(3m - it)(t + n)(n - t)}}.$$

Il s'agit dans l'intégrale de séparer les parties réelles et les parties imaginaires; pour cela, transformons d'abord la quantité imaginaire qui provient du dénominateur, en posant

$$\frac{1}{\sqrt{3m - it}} = \alpha + \beta i;$$

d'où

$$\frac{1}{3m - it} = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i,$$

$$\frac{3m + it}{9m^2 + t^2} = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i,$$

$$(r) \qquad \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = \dfrac{3m}{9m^2 + t^2}, \\ 2\alpha\beta \quad = \dfrac{t}{9m^2 + t^2}, \\ \alpha^2 + \beta^2 = \dfrac{1}{\sqrt{9m^2 + t^2}}. \end{cases}$$

Le radical est pris naturellement avec le signe $+$.

$$2\alpha^2 = \frac{3m + \sqrt{9m^2 + t^2}}{9m^2 + t^2},$$

$$2\beta^2 = \frac{\sqrt{9m^2 + t^2} - 3m}{9m^2 + t^2}.$$

Avant d'extraire les racines carrées, je ferai observer que le signe de α est arbitraire; je prendrai le signe *plus;* mais le signe de β est déterminé par la deuxième égalité (r) : c'est celui de t; ce que j'indiquerai par la notation ε_t. Nous aurons ainsi

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3m + \sqrt{9m^2 + t^2}}}{\sqrt{9m^2 + t^2}},$$

$$\beta = \varepsilon_t \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\sqrt{9m^2 + t^2} - 3m}}{\sqrt{9m^2 + t^2}}.$$

Cela posé, le produit $(m - it)\, i\, (\alpha + \beta i)$ ayant pour valeur

$$\alpha t - \beta m + i(\alpha m + \beta t),$$

on aura, en posant

$$\eta_2 = \mathrm{A} + i\mathrm{B},$$

$$\mathrm{A} = \int_{-n}^{+n} \frac{dt}{2\sqrt{2}\sqrt{9m^2 + t^2}\sqrt{n^2 - t^2}} \left[t\sqrt{3m + \sqrt{9m^2 + t^2}} - m\varepsilon_t \sqrt{\sqrt{9m^2 + t^2} - 3m}\right],$$

$$\mathrm{B} = \int_{-n}^{+n} \frac{dt}{2\sqrt{2}\sqrt{9m^2 + t^2}\sqrt{n^2 - t^2}} \left[m\sqrt{3m + \sqrt{9m^2 + t^2}} + t\varepsilon_t \sqrt{\sqrt{9m^2 + t^2} - 3m}\right].$$

Si l'on écrit

$$A = \int_{-n}^{0} + \int_{0}^{+n},$$

les coefficients différentiels, qui figurent dans chaque intégrale, passent évidemment par la même série de valeurs, en valeur absolue; mais, à cause des facteurs t, $-\varepsilon_t$, les deux intégrales sont de signes contraires, et A est nulle, ce que nous avions prévu; au contraire, dans B, les deux intégrales partielles s'ajoutent, et l'on peut écrire

$$B = \frac{\eta_2}{i} = \int_0^n \frac{dt}{\sqrt{2}\sqrt{9m^2+t^2}\sqrt{n^2-t^2}}\left[m\sqrt{3m+\sqrt{9m^2+t^2}} + t\sqrt{\sqrt{9m^2+t^2}-3m}\right].$$

Je poserai

$$\sqrt{9m^2+t^2} = y;$$

d'où

$$t\,dt = y\,dy,$$

et je rappellerai que, suivant une notation précédente [formule (f)],

$$\sqrt{9m^2+n^2} = H.$$

Il vient, *en supposant m positif,*

$$B = \int_{3m}^{H} \frac{(y-2m)\,dy}{\sqrt{2}\sqrt{(y-3m)(H^2-y^2)}}.$$

Soit maintenant, pour avoir un dénominateur de la forme type $\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}$,

$$y = -p+m,$$

la valeur définitive de B sera

$$(s) \qquad B = +\sqrt{2}\int_{-2m}^{m-H} \frac{(p+m)\,dp}{2\sqrt{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)}},$$

en posant

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= m+H \\ p_2 &= -2m \\ p_3 &= m-H \end{aligned}\right\} \quad p_1 > p_2 > p_3.$$

Il existe donc une fonction $p_\alpha u$ définie par l'égalité

$$u = \int_p^\infty \frac{dp}{2\sqrt{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)}}.$$

Soient $2\Omega_1$ et $2\Omega_2$ ses périodes réelle et purement imaginaire, je poserai, dans la formule (s),

$$p = p_\alpha(u - \Omega_1 - \Omega_2) = p_\alpha(u + \Omega_3),$$

et il faudra donner à u les valeurs zéro et Ω_1 pour que p prenne les valeurs correspondantes p_2 et p_3; on aura donc, les intégrations se faisant sur des quantités réelles, comme à la page 87,

$$\begin{aligned} B &= -\sqrt{2}\int_{\Omega_1}^{0} [p_\alpha(u+\Omega_3) - m]\,du \\ &= \sqrt{2}[\zeta_\alpha(\Omega_3) + \zeta_\alpha(\Omega_2) - m\Omega_1] \\ &= \sqrt{2}\left[\eta_{\alpha 3} + \eta_{\alpha 2} + \frac{e_1}{2}\Omega_1\right] \end{aligned}$$

ou enfin

$$(t) \qquad \frac{\eta_2}{i} = B = \sqrt{2}\left(\frac{e_1}{2}\Omega_1 - \eta_{\alpha 1}\right);$$

les indices α rappellent que les constantes se rapportent à la fonction $p_\alpha u$, ou encore aux fonctions elliptiques de module k_α

$$k_\alpha^2 = \frac{p_2 - p_3}{p_1 - p_3} = \frac{1}{2} + \frac{3e_1}{4H}.$$

Ce module est précisément celui rencontré dans le calcul des périodes, formule (k); donc

$$k_\alpha^2 = k_1'^2.$$

Le module complémentaire $k_\alpha'^2 = 1 - k_\alpha^2$ sera

$$k_\alpha'^2 = k_1^2,$$

les intégrales complètes correspondantes seront K_1' et K_1; enfin les intégrales complètes de seconde espèce seront

$$E_\alpha = E_1' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,\sqrt{1 - k'^2\sin^2\varphi},$$

$$E_\alpha' = E_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}.$$

Or, on a trouvé, dans le cas du discriminant positif (48) et (75), que

$$\Omega_1 = \frac{K_\alpha}{\sqrt{p_1 - p_3}} = \frac{K'_1}{\sqrt{2H}} = \frac{\omega_2}{i},$$

$$\eta_{\alpha 1} = \sqrt{p_1 - p_2}\left(E_\alpha - \frac{p_1}{p_1 - p_3} K_\alpha\right) = \sqrt{2H}\left(E'_1 - \frac{m + H}{2H} K'_1\right).$$

La formule (t) devient donc

$$(81) \qquad \eta_2 = i\sqrt{H}\,(K'_1 - 2E'_1).$$

Une méthode analogue à celle employée dans le cas du discriminant positif permet de rattacher la constante réelle η_1, qui nous reste à obtenir, à la quantité purement imaginaire η' d'une fonction $\zeta(u;\, g_2, -g_3)$, par la formule

$$\eta' = -\eta_1 i;$$

η' est donnée par la formule (81) dans laquelle il faut seulement mettre le module complémentaire, ce qui revient à remplacer K'_1 par K_1, E'_1 par E_1, et l'on a finalement

$$(82) \qquad \eta_1 = (K_1 - 2E_1)\sqrt{H}.$$

Corollaire. — Du rapprochement des équations (78), (78 *bis*), (81), (82) et (73), il résulte que

$$(u) \qquad \eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \pi.$$

Cette égalité, non concordante avec l'identité (25), nous montre une fois de plus que ω_1, ω_2 ne sont pas les périodes qu'il faudrait employer pour constituer les fonctions θ destinées à reproduire nos fonctions actuelles $\wp u$ et ζu.

Au contraire, l'égalité

$$\eta''\omega' - \eta'\omega'' = \frac{\pi i}{2},$$

qui proviendrait de la constitution d'une fonction θ aux périodes ω' et ω'', conduit immédiatement à l'équation (u), en se reportant aux formules (o) et (q).

96412

PRINCIPAUX PROBLÈMES.

Il résulte de ce qui précède que nous saurons toujours, en nous reportant à la Table I, calculer les périodes ω_1, ω_2 et les intégrales η_1, η_2 correspondantes. Dans ce qui suit, nous allons passer en revue quelques-uns des principaux problèmes qui se présenteront dans la pratique.

Problème I. — *Connaissant u et k, calculer* $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, pu, $p'u$ et ζu.

1° *Calcul de* $\operatorname{sn} u$. — La Table II donne la réponse immédiate; nous savons qu'on pose

$$k = \sin\theta, \qquad \operatorname{sn} u = \sin\varphi;$$

soit $u = u_0$ la valeur donnée; la Table fait connaître l'amplitude φ_0 correspondante, et les Tables de logarithmes ordinaires donnent $\sin\varphi_0 (= \operatorname{sn} u)$.

Soit, par exemple, $k = \frac{1}{2}$, $u_0 = 0,47551$; comme $\theta = 30°$, on trouve, en descendant la colonne qui commence par 30°, le nombre u_0 donné; d'où

$$\varphi_0 = 27°,$$
$$\log\sin\varphi_0 = \bar{1},6570468,$$
$$\operatorname{sn} u = \sin\varphi_0 = 0,45399.$$

2° *Calcul de* $\operatorname{cn} u$. — La formule

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1$$

permet de ramener le calcul de $\operatorname{cn} u$ à celui de $\operatorname{sn} u$; on aura

$$\operatorname{cn} u = \pm\sqrt{(1 - \operatorname{sn} u)(1 + \operatorname{sn} u)}.$$

3° *Calcul de* $\operatorname{dn} u$. — On utilisera la formule

$$\operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1$$

ou

$$\operatorname{dn} u = \pm\sqrt{(1 - k\operatorname{sn} u)(1 + k\operatorname{sn} u)}.$$

4° *Calcul de* pu. — La formule (63 *bis*) donne la solution dans le cas du discriminant positif

$$pu = e_2 + \frac{e_1 - e_2}{\operatorname{sn}^2(u\sqrt{e_1 - e_2})} \qquad (e_1 > e_3 > e_2).$$

Si Δ est négatif, c'est la formule (80) qui doit être employée

$$pu = e_1 + \mathrm{H}\frac{1 + \operatorname{cn}(2u\sqrt{\mathrm{H}})}{1 - \operatorname{cn}(2u\sqrt{\mathrm{H}})}$$

$$\left(\mathrm{H} = \sqrt{9m^2 + n^2}, \qquad e_2 = m + ni, \qquad e_3 = m - ni, \qquad k^2 = \frac{1}{2} - \frac{3e_1}{4\mathrm{H}}\right).$$

5° *Calcul de* $p'u$. — L'équation différentielle donne, dans le cas du discriminant positif,

$$p'u = 2\sqrt{(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3)}$$

et, si $\Delta < 0$,

$$p'u = 2\sqrt{(pu - e_1)[(pu - m)^2 + n^2]}.$$

6° *Calcul de* ζu. — Ici, quelques explications préliminaires sont nécessaires. Legendre a donné des Tables où se trouvent inscrites les valeurs de l'intégrale elliptique de seconde espèce, qu'il a prise pour type et qui est désignée par la notation $\mathrm{E}(\varphi, k)$, ou simplement $\mathrm{E}(\varphi)$ lorsqu'on n'a pas besoin de spécifier le module k :

$$(u) \qquad \mathrm{E}(\varphi) = \int_0^{\varphi} d\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}.$$

Nous donnons, à la fin du Volume, un abrégé de ces Tables pour toutes les valeurs de φ, de degré en degré, et pour les valeurs de θ, de cinq degrés en cinq degrés. Il s'agit maintenant d'y rattacher ζu.

Si le discriminant est positif, la transformation utilisée pour relier $\operatorname{sn} u$ et pu sert encore ici ; on pose

$$(v) \qquad \sin\varphi = \operatorname{sn}(u\sqrt{\lambda}), \qquad \lambda = e_1 - e_2;$$

d'où

$$\cos\varphi\, d\varphi = \sqrt{\lambda}\operatorname{cn}(u\sqrt{\lambda})\operatorname{dn}(u\sqrt{\lambda})\, du,$$

$$\mathrm{E}(\varphi) = \sqrt{\lambda}\int_0^u \operatorname{dn}^2(u\sqrt{\lambda})\, du = \sqrt{\lambda}\int_0^u (1 - k^2\operatorname{sn}^2 u\sqrt{\lambda})\, du,$$

ou, en tenant compte de l'équation (63 *bis*),

$$E(\varphi) = u\sqrt{\lambda} - k^2\sqrt{\lambda}\int_0^u \frac{\lambda\, du}{pu - e_2}.$$

Or (59)

$$\frac{e_1 - e_2}{pu - e_2} = \frac{p(u + \omega_2) - e_2}{e_3 - e_2};$$

donc

$$E(\varphi) = u\sqrt{\lambda} - \frac{k^2\sqrt{\lambda}}{e_3 - e_2}\int_0^u [p(u + \omega_2) - e_2]\, du$$

$$= \sqrt{\lambda}\, u\left(1 + \frac{k^2 e_2}{e_3 - e_2}\right) + k^2\frac{\sqrt{\lambda}}{e_3 - e_2}[\zeta(u + \omega_2) - \eta_2]$$

ou

$$(83) \qquad \sqrt{\lambda}\, E(\varphi) = e_1 u + \zeta(u + \omega_2) - \eta_2.$$

La formule (40) permet de faire disparaître toute trace d'imaginaires en remplaçant les deux derniers termes par $\zeta u + \frac{1}{2}\frac{p'u}{pu - e_1}$, et l'on a

$$(83\ bis) \qquad \sqrt{\lambda}\, E(\varphi) = e_1 u + \zeta u + \frac{1}{2}\frac{p'u}{pu - e_2};$$

d'où la règle suivante : *Étant donné u, on calcule $u\sqrt{\lambda}$, puis, à l'aide de la Table II, φ, comme cela a été indiqué* 1°; *la Table III donne alors* $E(\varphi)$ *et, dans la formule précédente, tout est connu sauf ζu qui est ainsi déterminée.*

Si le discriminant est négatif, nous partirons de la formule (80), comme 4°,

$$pu = e_1 + H\frac{1 + \operatorname{cn}(2u\sqrt{H})}{1 - \operatorname{cn}(2u\sqrt{H})},$$

et nous y remplacerons d'abord u par $u + \omega_1$,

$$p(u + \omega_1) = e_1 + H\frac{1 + \operatorname{cn}(2u\sqrt{H} + 2K_1)}{1 - \operatorname{cn}(2u\sqrt{H} + 2K_1)}$$

$$= e_1 + H\frac{1 - \operatorname{cn}(2u\sqrt{H})}{1 + \operatorname{cn}(2u\sqrt{H})},$$

puis nous intégrerons à partir de zéro

$$(x)\quad \left\{\begin{aligned} \zeta(u+\omega_1)-\eta_1 &= -\int_0^u \wp(u+\omega_1)\,du \\ &= -e_1 u - \mathrm{H}\int_0^u \frac{1-\mathrm{cn}(2u\sqrt{\mathrm{H}})}{1+\mathrm{cn}(2u\sqrt{\mathrm{H}})}\,du. \end{aligned}\right.$$

Cette formule suppose essentiellement u compris entre $-\omega_1$ et $+\omega_1$, pour que les intégrales soient bien définies; mais, comme $\zeta(u+2\omega_1)=\zeta u+2\eta_1$, on peut toujours ramener u à être dans cet intervalle.

Pour transformer la dernière intégrale, je m'appuierai sur la formule facile à vérifier (*voir* les Exercices à la fin du Chapitre)

$$\frac{1-\mathrm{cn}(2u\sqrt{\mathrm{H}})}{1+\mathrm{cn}(2u\sqrt{\mathrm{H}})} = \frac{\mathrm{sn}^2(u\sqrt{\mathrm{H}})\,\mathrm{dn}^2(u\sqrt{\mathrm{H}})}{\mathrm{cn}^2(u\sqrt{\mathrm{H}})}.$$

Considérons maintenant une fonction $\wp_\alpha u$ définie par les racines

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{H}}{2}-\frac{e_1}{4} &= p_1 = \mathrm{H}\,\frac{2-k_1^2}{3} \\ \frac{e_1}{2} &= p_2 = \mathrm{H}\,\frac{2k_1^2-1}{3} \end{aligned}\right\} \qquad k_1^2 = \frac{1}{2}+\frac{3e_1}{4\mathrm{H}},$$

$$-\frac{\mathrm{H}}{2}-\frac{e_1}{4} = p_3 = -\mathrm{H}\,\frac{1+k_1^2}{3} \qquad (p_1>p_2>p_3);$$

$\wp_\alpha u$ est reliée à $\mathrm{sn}(u\sqrt{\mathrm{H}})$ par la formule (63 *bis*),

$$\mathrm{sn}^2 u\sqrt{\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{H}}{\wp_\alpha u - p_3};$$

d'où

$$\mathrm{cn}^2 u\sqrt{\mathrm{H}} = \frac{\wp_\alpha u - p_1}{\wp_\alpha u - p_3},$$

$$\mathrm{dn}^2 u\sqrt{\mathrm{H}} = \frac{\wp_\alpha u - p_2}{\wp_\alpha u - p_3}.$$

L'expression à intégrer devient ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{H}(\wp_\alpha u - p_3)}{(\wp_\alpha u - p_3)(\wp_\alpha u - p_1)} &= \frac{\mathrm{H}(p_1-p_2)}{(p_1-p_3)(\wp_\alpha u - p_1)} + \frac{\mathrm{H}(p_3-p_2)}{(p_3-p_1)(\wp_\alpha u - p_3)} \\ &= \frac{1}{\mathrm{H}}\left[\wp_\alpha(u+\Omega_1)+\wp_\alpha(u+\Omega_2)+p_2\right]. \end{aligned}$$

L'intégration de la formule (x) est maintenant immédiate, et l'on a

$$\zeta(u+\omega_1)-\eta_1=-e_1u+\zeta_\alpha(u+\Omega_1)+\zeta_\alpha(u+\Omega_2)-\eta_{\alpha 1}-\eta_{\alpha 2}+p_2u.$$

Or, la formule (40) donne, en y remplaçant u par $u+\Omega_2$ et v par $\Omega_1-\Omega_2$,

$$\zeta_\alpha(u+\Omega_1)=\zeta_\alpha(u+\Omega_2)+\zeta_\alpha(\Omega_1-\Omega_2)+\frac{1}{2}\frac{p'_\alpha u}{p_\alpha u-p_2};$$

d'autre part

$$\zeta_\alpha(\Omega_1-\Omega_2)=\zeta_\alpha(\Omega_1+\Omega_2)-2\eta_{\alpha 2}=-\eta_{\alpha 3}-2\eta_{\alpha 2}$$

et, à cause de (83),

$$2\zeta_\alpha(u+\Omega_2)=2\eta_{\alpha 2}+2\sqrt{\mathrm{H}}\,\mathrm{E}(\varphi)-2p_1u.$$

Donc enfin, en remplaçant p_1 et p_2 par leurs valeurs et ajoutant les quatre égalités précédentes membre à membre,

$$(84)\qquad \zeta(u+\omega_1)-\eta_1=-u\mathrm{H}+2\sqrt{\mathrm{H}}\,\mathrm{E}(\varphi,k_1)+\frac{p'_\alpha u}{2p_\alpha u-e_1}$$

avec

$$\sin\varphi=\mathrm{sn}(u,k_1).$$

Telle est l'équation qui remplacera (83) et permettra de calculer ζu dans le cas du discriminant négatif.

Problème II. — *Connaissant une fonction elliptique, calculer l'argument.*

1° *On donne* $\mathrm{sn}\,u$; *calculer* u. — La même Table II, déjà employée, fournira une solution. Si a est la valeur donnée de u et θ l'angle modulaire, l'égalité $\sin\varphi=a$ fera connaître un angle φ et u se lira au croisement de la ligne et de la colonne qui commencent par les valeurs données φ et θ. Soit u_0 le nombre ainsi lu; on aura

$$\mathrm{sn}\,u=\mathrm{sn}\,u_0;$$

d'où

$$u=u_0+4m\mathrm{K}+2m'i\mathrm{K}'$$

et, en utilisant la première formule (49), dans laquelle on posera $u=-u_0$,

$$u=2\mathrm{K}-u_0+4m\mathrm{K}+2m'i\mathrm{K}'.$$

2° *On donne* $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$. — Par suite, on connaît $\operatorname{sn} u$ et u, sauf un choix de valeurs facile à faire et analogue à celui qu'on fait dans la Trigonométrie élémentaire pour les problèmes analogues.

3° *On donne* pu. — Soit $pu = a$ et $\Delta > 0$. La formule (63) donne alors

$$\operatorname{sn}(u\sqrt{e_1 - e_2}) = \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{\pm\sqrt{a - e_2}}.$$

On connaît donc $\operatorname{sn} u\sqrt{e_1 - e_2}$, et la Table donnera une valeur pour $u\sqrt{e_1 - e_2}$, d'où u; soit u_0 la valeur ainsi obtenue; on aura

$$pu = pu_0$$

et par suite

$$(y) \qquad u = \pm u_0 + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2.$$

Cela suppose $a > e_1$: si a est entre e_2 et e_3, u est de la forme $\omega_2 + v$ et pv sera donné par l'équation (59)

$$pv = e_2 + \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{a - e_2};$$

d'où l'on tirera v.

Si le discriminant est négatif, c'est la formule (80) qu'il faudra employer

$$\frac{1 + \operatorname{cn} 2u\sqrt{H}}{1 - \operatorname{cn} 2u\sqrt{H}} = \frac{a - e_1}{H},$$

$$\operatorname{cn} 2u\sqrt{H} = \frac{a - e_1 - H}{a - e_1 + H}.$$

On connaît donc $\operatorname{cn} 2u\sqrt{H}$; par suite, au signe près, $\operatorname{sn} 2u\sqrt{H}$, par suite $2u\sqrt{H}$ et $u = u_0$. Il faut bien observer ici que les périodes réelle ω_1 et purement imaginaire ω_2 n'étant pas primitives, la série de valeurs répondant à la question sera donnée, non par la formule (y) qui vient d'être écrite, mais par la suivante (*voir* la remarque de la page 92)

$$(z) \qquad u = \pm u_0 + m_1\omega_1 + m_2\omega_2.$$

Bien entendu, il restera toujours une discussion trigonométrique provenant de ce que c'est pu, et non $\operatorname{sn} 2u\sqrt{H}$, qui est donnée.

Remarque. — Si a est compris entre e_1 et e_3 ou inférieur à e_2 dans le cas du discriminant positif, si a est inférieur à e_1 dans le cas du discriminant négatif, on remplacera a par $-a$ et l'on aura, par les procédés qui viennent d'être donnés, $u\sqrt{-1}$ [*voir* équat. (67')].

4° *On donne* ζu. — Il n'est pas possible ici de donner un procédé de calcul; on devra donc procéder par approximation, en s'inspirant du problème particulier à résoudre et de la variation connue de ζu.

Remarque générale. — Dans certains cas particuliers, les formules peuvent se simplifier (*voir*, par exemple, le cas où $g_2 = 0$, p. 129 et 130).

Exercices sur le Chapitre VI.

1. Étudier la variation du rapport $\frac{\omega_2}{i\omega_1}$: 1° dans le cas du discriminant positif; 2° dans le cas du discriminant négatif.

2. Calculer ω_1 dans le cas du discriminant négatif par la méthode suivante : on posera

$$y = \frac{(z-m)^2 + n^2}{z - e_1} = y_2 + \frac{(z - z_2)^2}{z - e_1},$$

y_2 étant le minimum de y considéré comme fonction de z définie par l'égalité précédente, et z_2 la valeur de z qui lui correspond.

Soient de même y_3, z_3 les valeurs de y et de z correspondant au maximum; on aura

$$y_2 = 3e_1 + 2\mathrm{H}, \qquad y_3 = 3e_1 - 2\mathrm{H},$$

$$\mathrm{H} = \sqrt{(m - e_1)^2 + n^2},$$

$$z_2 = m + \frac{y_2}{2} = e_1 + \mathrm{H}.$$

On posera alors

$$y = p_1(u;\, e'_1,\, e'_2,\, e'_3) - e'_3$$

avec

$$e'_1 = e_1 + 2\mathrm{H}, \qquad e'_2 = e_1 - 2\mathrm{H}, \qquad e'_3 = -2e_1, \qquad e'_1 > e'_3 > e'_2,$$

et si l'on appelle $2\omega'_1$ la période réelle de $p_1 u$, on verra que

$$\omega_1 = 2\omega'_1 = \frac{2K_1}{\sqrt{e'_1 - e'_2}} = \frac{K_1}{\sqrt{H}};$$

dans cette formule, l'intégrale complète de Legendre correspond au module

$$k_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{3e_1}{4H}.$$

Par suite, si K'_1 est l'intégrale complète relative au module complémentaire $k'^2_1 = 1 - k_1^2$, et si $2\omega'_2$ désigne la période imaginaire de $p_1 u$, on aura

$$2\omega'_2 = \frac{K'_1}{\sqrt{H}},$$

et il suffit de comparer avec le texte pour voir que $2\omega'_2 = \omega_2$.

3. En désignant par Δ la quantité $\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$, et en posant

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta} = F(k, \varphi) = F, \qquad \int_0^\varphi \Delta\, d\varphi = E(k, \varphi) = E,$$

démontrer que

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{k'^2} E(k, \varphi) - \frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{k'^2 \Delta},$$

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi \sin^2\varphi}{\Delta} = \frac{1}{k^2}(F - E),$$

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi \cos^2\varphi}{\Delta} = \frac{1}{k^2}(E - k'^2 F),$$

$$\int_0 \frac{d\varphi}{\Delta \cos^2\varphi} = \frac{1}{k'^2}(\Delta \operatorname{tang}\varphi + k'^2 F - E),$$

$$\int_0 \frac{d\varphi \operatorname{tang}^2\varphi}{\Delta} = \frac{1}{k'^2}(\Delta \operatorname{tang}\varphi - E),$$

$$\int_0 \frac{d\varphi \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\varphi}{\Delta} = 2\Delta \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi + F - 2E,$$

$$\int_0 \frac{\Delta\, d\varphi}{\cos^2\varphi} = \Delta \operatorname{tang}\varphi + F - E,$$

$$\int_0 \Delta^3\, d\varphi = \frac{k^2}{3}\Delta \sin\varphi \cos\varphi + \frac{4 - 2k^2}{3} E - \frac{k'^2}{3} F,$$

$$\int_0 \Delta\, d\varphi \sin^2\varphi = -\frac{1}{3}\Delta \sin\varphi \cos\varphi + \frac{2k^2 - 1}{3k^2} E + \frac{k'^2}{3k^2} F.$$

4. Dans le cas du discriminant négatif, démontrer, en se servant de la formule d'addition, que $p(\omega_1 + \omega_2)$ est infinie.

5. Démontrer que

$$\frac{1 - \operatorname{cn} 2u\sqrt{H}}{1 + \operatorname{cn} 2u\sqrt{H}} = \frac{\operatorname{sn}^2 u\sqrt{H}\operatorname{dn}^2 u\sqrt{H}}{\operatorname{cn}^2 u\sqrt{H}}.$$

Il suffit de faire $v = u$ dans la formule d'addition de $\operatorname{cn} u$ (p. 68) pour avoir $\operatorname{cn} 2u$; d'où facilement la formule ci-dessus en utilisant les formules (53).

CHAPITRE VII.

APPLICATIONS.

1° APPLICATIONS MÉCANIQUES : I. PENDULE SIMPLE. — II. ÉLASTIQUE PLANE. — III. MOUVEMENT D'UN PROJECTILE DANS UN MILIEU OU LA RÉSISTANCE EST PROPORTIONNELLE AU CUBE DE LA VITESSE. — IV. PENDULE SPHÉRIQUE.
2° APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES : I. ARC D'ELLIPSE. — II. AIRE DE L'ELLIPSOIDE.
3° APPLICATION ALGÉBRIQUE : RÉSOLUTION NUMÉRIQUE D'UNE ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ.

Nous traiterons, dans ce Chapitre, quelques problèmes empruntés aux diverses sciences d'application. Le livre de M. Greenhill, traduit par M. Griess, nous a été de la plus grande utilité dans la rédaction de ce Chapitre.

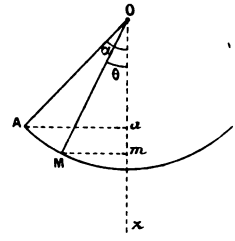
APPLICATIONS MÉCANIQUES.

I. — PENDULE SIMPLE.

Soient l la longueur du pendule, α l'angle d'écart initial égal à $\widehat{ZOA}$, θ l'angle d'écart à l'instant t lorsque le mobile a parcouru le chemin s, les arcs et les temps étant comptés à partir du moment où le pendule est vertical. L'axe des z est vertical et supposé dirigé de haut en bas : on suppose qu'à l'instant $-T$, le

pendule a été abandonné à lui-même sans impulsion, à partir de OA (*fig.* 9).

Fig. 9.



Le théorème des forces vives donne immédiatement la relation

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g\,\overline{am} = 2gl(\cos\theta - \cos\alpha$$

or

$$ds = l\,d\theta.$$

L'équation du pendule est donc

$$l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 4g\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

ou, en posant

$$n = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$(a) \qquad n\,dt = \frac{d\theta}{2\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}.$$

Le signe + choisi devant le radical correspond à la montée. Soit

$$\sin\frac{\alpha}{2} = k, \qquad \sin\frac{\theta}{2} = k\sin\varphi;$$

d'où

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} = k\cos\varphi\,d\varphi.$$

L'équation (a) devient

$$n\,dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}},$$

$$(b) \qquad nt = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

Le temps est donc donné par une intégrale elliptique de première espèce dont Legendre a construit les Tables (*voir* notre Table II).

Remarque. — En fait, ici, les fonctions elliptiques ne sont pas encore intervenues et, dans bien des cas, on pourra s'en passer. Mais leur introduction simplifie les calculs et permet de trouver des transformations qui, sans cela, seraient demeurées cachées.

Le temps que le pendule met pour s'élever de l'angle α s'obtient en faisant $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ($\theta = \alpha$); on a alors l'intégrale complète

$$K = nT = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

En faisant l'inversion de la formule (b), elle devient

$$\sin\varphi = \operatorname{sn} t \sqrt{\frac{g}{l}}$$

ou

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} \operatorname{sn} t \sqrt{\frac{g}{l}} = \sin\frac{\alpha}{2} \operatorname{sn} u.$$

D'après les propriétés de $\operatorname{sn} u$, lorsque u augmente de $2K$, $\operatorname{sn} u$ change de signe sans changer de valeur, θ change de signe sans changer de valeur; le pendule prend donc, pour deux valeurs du temps différentes entre elles de $2K\sqrt{\frac{l}{g}}$, deux positions symétriques par rapport à la verticale. $2K\sqrt{\frac{l}{g}}$ est la durée d'une oscillation simple et, parce que $4K$ est la période de $\operatorname{sn} u$, $4K\sqrt{\frac{l}{g}}$ est la période du pendule, c'est-à-dire le temps nécessaire pour le faire repasser au même point avec une vitesse dirigée dans le même sens.

Dans ce qui précède, on a supposé qu'il existait une position du pendule où la vitesse peut être nulle (angle d'écart initial); les mêmes résultats seraient obtenus en supposant que le mobile est écarté de la verticale avec une vitesse initiale v_0 égale à $\sqrt{2gl\cos\alpha}$. Les résultats sont un peu différents si v_0^2 est supérieure à $2g.2l$

($2l$ hauteur de chute maximum); le pendule tourne alors constamment dans le même sens. Posons $v_0^2 = 2ga$ ($a > 2l$); le théorème des forces vives donne

$$(c) \qquad v^2 - v_0^2 = 2g(z - z_0) = 2g(z - l) = 2gl(\cos\theta - 1),$$
$$v^2 = 2ag\left(1 - k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

en posant $k = \frac{2l}{a}$. La forme est analogue à celle du cas précédent; nous n'y insisterons pas davantage.

Soit enfin $v_0^2 = 4gl$; l'équation (c) devient

$$v^2 = 4gl - 4gl \sin^2 \frac{\theta}{2} = 4gl \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

et s'intègre par les fonctions élémentaires. On trouvera

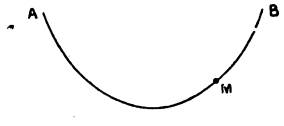
$$t\sqrt{\frac{g}{l}} = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4}\right),$$

et il est très intéressant de remarquer : au point de vue analytique, que ce cas correspond à une valeur 1 pour le module k des fonctions elliptiques; au point de vue mécanique, que, pour atteindre le point le plus haut $\theta = \pi$, le pendule mettra un temps infini; cela tient à ce que sa vitesse tend alors vers zéro.

II. — ÉLASTIQUE PLANE.

L'étude de la forme prise par une lame de métal élastique que l'on déforme, ainsi que des pressions auxquelles elle est soumise, est du domaine des fonctions elliptiques, comme on va le voir.

Fig. 10.



Nous nous bornerons, dans ce qui suit, à un cas particulier : celui où la fibre moyenne de la lame est plane et où ses extrémités seules sont soumises à des forces extérieures; nous renverrons,

pour l'étude complète, au Chapitre V du Tome II d'Halphen (p. 192 à 236), dont la lecture n'offrira plus de difficulté quand on aura compris ce qui suit. La lame AB (*fig.* 10) fléchie étant supposée coupée au point M, il faut, pour maintenir la portion AM en équilibre, remplacer l'action de la portion supprimée MB par une force F appliquée en M et par un couple N; on admet que le couple a son moment N proportionnel à la variation de courbure de la fibre venue en M

$$N = B\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right);$$

ρ est le rayon de courbure en M, ρ_0 le rayon en M_0 avant la déformation, B un coefficient dépendant de la nature et des dimensions de la tige métallique. Dans ce qui suit, nous supposerons que la forme primitive de la tige était circulaire ou droite $\left(\frac{1}{\rho_0}\right.$ constante ou nulle$\left.\right)$. Pour avoir les équations d'équilibre, il suffit d'exprimer que la force F et le couple N font équilibre aux éléments analogues F_1 et N_1 correspondant au bout A, ce qui exige d'abord que les forces F et F_1 soient parallèles, de sens contraire et égales en grandeur. Prenons leur direction pour axe des x, les axes rectangulaires ayant encore une origine et des directions non fixées. Soient x_1, y_1 les coordonnées du point A; x, y celles de M; la somme des moments de toutes les forces par rapport au point O doit être nulle; d'où l'équation

$$F_1 y_1 - F y + N - N_1 = 0.$$

On en tire pour N une valeur de la forme

$$(e) \qquad N = A(y - y');$$

d'où

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2C}{a^2}(y - y''),$$

ou, en déplaçant Ox parallèlement à lui-même,

$$(f) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{2C}{a^2} y \quad (^1).$$

---

(1) Dans la pratique, l'équation (f) s'intègre en prenant $\frac{1}{\rho} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, ce qu'on

On peut toujours, en choisissant convenablement le sens des moments, supposer C positif, ce que nous ferons.

Pour intégrer l'équation (f), appelons θ l'angle de Ox avec la tangente à la courbe en M; on aura

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \cos\theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial s} = -\sin\theta, \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{\partial\theta}{\partial s};$$

d'où

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = -\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial s}\frac{1}{\rho},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = \frac{2C}{a^2}y\frac{\partial y}{\partial s}.$$

Intégrons : il vient, en désignant par h une constante,

$$(g) \qquad \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{Cy^2}{a^2} + h.$$

Portons cette valeur de $\frac{\partial x}{\partial s}$ dans l'équation connue

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = 1.$$

Nous en tirerons

$$\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = 1 - \left(\frac{Cy^2}{a^2} + h\right)^2;$$

d'où

$$s = \int \frac{dy}{\sqrt{1 - \left(\frac{Cy^2}{a^2} + h\right)^2}}.$$

C'est une intégrale elliptique; nous pourrons donc, en effectuant l'inversion, exprimer y en fonction elliptique de s. Pour cela, posons, z étant une nouvelle variable *positive*,

$$y^2 = a^2 z;$$

d'où

$$dy = \frac{a\,dz}{2\sqrt{z}}.$$

---

peut faire si $\frac{\partial y}{\partial x}$ est très petit; s'il n'en est pas ainsi, on ne peut pas non plus, en général, adopter pour N la valeur donnée par la formule (e). Le problème traité dans le texte est donc en réalité un problème très particulier.

L'intégrale devient

$$s = \int \frac{a\,dz}{2\sqrt{z(1+Cz+h)(1-Cz-h)}},$$

et les racines de la quantité soumise au radical sont

$$z_0 = 0, \qquad z_1 = -\frac{h+1}{C}, \qquad z_2 = \frac{1-h}{C}.$$

Il faut classer ces racines; nous supposerons pour cela $h^2 < 1$; alors on a

$$z_2 > z_0 > z_1$$

et, pour la réalité de s, il faudra que z reste compris entre z_2 et z_0. Posons alors

$$z = -p + \frac{z_0 + z_1 + z_2}{3} = -p - \frac{2h}{3C};$$

d'où

$$p = -z - \frac{2h}{3C}$$

et

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= -z_1 - \frac{2h}{3C} = \frac{h+3}{3C} \\ e_3 &= -z_0 - \frac{2h}{3C} = -\frac{2h}{3C} \\ e_2 &= -z_2 - \frac{2h}{3C} = \frac{h-3}{3C} \end{aligned}\right\} \quad (e_1 > e_3 > e_2),$$

$$\frac{C\,ds}{a} = du.$$

L'intégrale elliptique précédente devient

$$u = \int \frac{dp}{\sqrt{P}}, \qquad P = 2(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3),$$

et p devra être compris entre e_2 et e_3. Une dernière transformation est alors nécessaire pour pouvoir introduire pu avec des valeurs comprises entre e_2 et e_3, sans qu'il soit besoin pour cela de donner à u des valeurs imaginaires; cette transformation est inspirée par la formule (59)

$$p = e_3 + \frac{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}{t-e_3} = e_3 - \frac{\alpha^2}{t-e_3},$$

la dernière égalité définissant α. On voit que p variant de e_2 à e_3, t varie de e_1 à ∞. L'intégrale précédente devient alors

$$u = \int_t^\infty \frac{dt}{2\sqrt{(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}};$$

la constante d'intégration est, cette fois, définie par la condition que u s'annule pour $t = \infty$; on peut donc poser

$$t = \mathrm{p}(u;\, e_1,\, e_2,\, e_3) = \mathrm{p}u;$$

d'où

$$p = e_3 - \frac{\alpha^2}{\mathrm{p}u - e_3},$$

$$z = \frac{\alpha^2}{\mathrm{p}u - e_3},$$

$$y^2 = \frac{a^2\alpha^2}{\mathrm{p}u - e_3},$$

$$(h) \qquad y = \frac{a\alpha}{\sqrt{\mathrm{p}u - e_3}} = \frac{a\alpha}{\sqrt{e_1 - e_2}}\,\mathrm{sn}\left(u\sqrt{e_1 - e_2}\right).$$

Portons cette valeur dans (g) : nous aurons x

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\mathrm{C}\,dx}{a\,du} = \frac{\mathrm{C}\alpha^2}{\mathrm{p}u - e_3} + h,$$

$$\frac{dx}{a\,du} = \frac{\alpha^2}{\mathrm{p}u - e_3} + \frac{h}{\mathrm{C}} = \frac{\alpha^2}{\mathrm{p}u - e_2} - \frac{3e_3}{2}.$$

L'équation (59) permet, en tenant compte de la valeur de α^2, d'écrire l'équation précédente

$$(i) \qquad \frac{dx}{a\,du} = -\mathrm{p}(u + \omega_3) + e_3 - \frac{3e_3}{2} = -\mathrm{p}(u + \omega_3) - \frac{e_3}{2},$$

et, en intégrant,

$$\frac{x}{a} = \zeta(u + \omega_3) - \eta_3 - \frac{1}{2}e_3 u,$$

la constante introduite par l'intégration a été choisie de manière que x, comme y, s'annule en même temps que u. La formule d'addition des fonctions ζ (40) permet, en y mettant ω_3 à la place de v, de transformer l'équation précédente en

$$(j) \qquad \frac{x}{a} = \zeta u - \frac{1}{2}e_3 u + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{p}'u}{\mathrm{p}u - e_3},$$

et cette formule, jointe à (h), donne la solution du problème; les deux coordonnées d'un point de l'élastique sont exprimées en fonction d'un seul paramètre et l'on pourra construire la courbe.

L'équation (i) donne la dérivée de x; reproduisons ces trois équations en y adjoignant la dérivée de y qui sera utile pour la discussion

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{x}{a} = \zeta u - \frac{1}{2} e_3 u + \frac{1}{2}\frac{p'u}{pu - e_3} = \zeta(u + \omega_3) - \eta_3 - \frac{1}{2} e_3 u,\\
&\frac{y}{a} = \frac{\alpha}{\sqrt{pu - e_3}} = \frac{\alpha}{\sqrt{e_1 - e_2}} \operatorname{sn}(u\sqrt{e_1 - e_2}),\\
&\frac{dx}{a\,du} = -p(u + \omega_3) - \frac{e_3}{2} = \frac{\alpha^2}{pu - e_3} - 3\frac{e_3}{2},\\
&\frac{dy}{du} = a\alpha\frac{\sqrt{(pu - e_1)(pu - e_2)}}{pu - e_3} = a\alpha \operatorname{cn}(u\sqrt{e_1 - e_2}) \operatorname{dn}(u\sqrt{e_1 - e_2}),
\end{aligned}\right.$$

Les signes des radicaux ont été choisis de manière que y croisse d'abord à partir de o avec u.

Construction de la courbe. — On voit, immédiatement, que x et y sont des fonctions impaires; l'origine est donc un centre. Le coefficient angulaire de la tangente à l'origine est $y'_x = -\frac{2a\alpha}{3e_3}$.

Supposons d'abord e_3 positive. — x et y sont d'abord nulles avec u; puis u croissant, y croît et x décroît (dérivée négative). La dérivée de y ne s'annule pas avant que u n'atteigne la valeur ω_1, pour cette valeur de u, $\frac{dy}{du} = 0$ et la tangente est horizontale si $\frac{dx}{du} \neq 0$. Cherchons la valeur de $\frac{dx}{du}$ pour $u = \omega_1$

$$\frac{dx}{a\,du} = -p(\omega_1 + \omega_3) - \frac{e_3}{2} = -e_2 - \frac{e_3}{2} = \frac{1}{G}.$$

Cette valeur est positive et le sens de la variation de x a changé entre u et ω_1; il n'a d'ailleurs pu changer qu'une fois, car la dérivée de $\frac{dx}{a\,du} = -\frac{\alpha^2 p'u}{(pu - e_3)^2}$ ne s'est pas annulée dans l'intervalle. La valeur finale de x sera

$$x_1 = \zeta(\omega_1 + \omega_3) - \eta_3 - \frac{1}{2} e_3 \omega_1 = -\eta_2 - \eta_3 - \frac{1}{2} e_3 \omega_1 = \eta_1 - \frac{1}{2} e_3 \omega_1;$$

elle pourra être positive, nulle ou négative.

La courbe se trouve ainsi bien définie pour toutes les valeurs de u, comprises entre $-\omega_1$ et $+\omega_1$. Si, maintenant, on change u en $2\omega_1 - u$, y ne change pas de valeur; mais comme

$$\zeta(2\omega_1 - u) = \zeta(-u) + 2\eta_1 = -\zeta u + 2\eta_1,$$

et

$$p'(2\omega_1 - u) = -p'u,$$

la demi-somme de deux valeurs de x correspondant à u et à $2\omega_1 - u$ sera

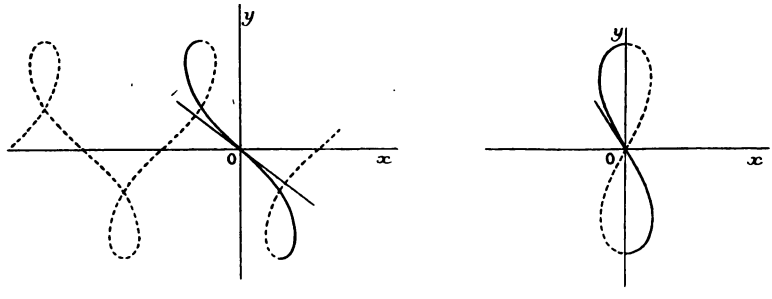
$$\eta_1 - \frac{1}{2} e_3 \omega_1,$$

c'est-à-dire précisément x_1. La courbe sera donc symétrique par

Fig. 11. Fig. 12.

h négatif.

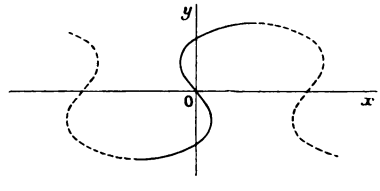
$\eta_1 - \frac{1}{2} e_2 \omega_1 < 0$ $\eta_1 - \frac{1}{2} e_2 \omega_1 = 0$



rapport à l'ordonnée maximum. La période $4\omega_1$ de y montre que

Fig. 13.

$\eta_1 - \frac{1}{2} e_2 \omega_1 > 0$



la courbe se reproduit ensuite indéfiniment à des intervalles égaux en abscisse à $4x_1 = 4\eta_1 - 2e_3\omega_1$. Les *fig.* 11, 12, 13, 14 montrent

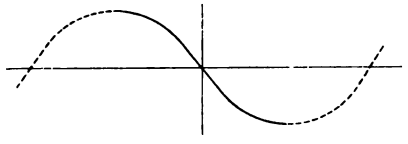
les diverses formes de courbe qu'on pourra obtenir : l'équation

$$(f) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{2C}{a^2} y$$

montre qu'il y a inflexion pour tous les points situés sur Ox et pour ceux-là seulement.

Fig. 14.

h positif.



CAS LIMITES.

1° $h = 0$. — On a, par la formule (i),

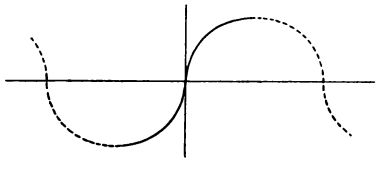
$$\frac{dx}{du} = \frac{a\alpha}{pu},$$

$\frac{dx}{du}$ part de o pour atteindre la valeur finale positive

$$\frac{a\alpha}{e_1} = ae_1,$$

x varie de o à η_1, et l'on a la forme suivante (*fig.* 15).

Fig. 15.



2° $h = -1$. — En revenant au début, on voit que la valeur de s s'écrit

$$s = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(2 - \frac{Cy^2}{a^2}\right)\frac{Cy^2}{a^2}}} = \frac{a}{\sqrt{C}} \int \frac{dy}{y\sqrt{2 - \frac{Cy^2}{a^2}}}.$$

C'est un *cas de dégénérescence*. On est ramené aux fonctions circulaires, en posant

$$\frac{y}{a} = \sqrt{\frac{2}{C}} \sin\varphi,$$

on trouve

$$\frac{\sqrt{2C}}{a}\,ds = \frac{d\varphi}{\sin\varphi}.$$

En portant les deux valeurs précédentes dans l'équation (g), elle devient

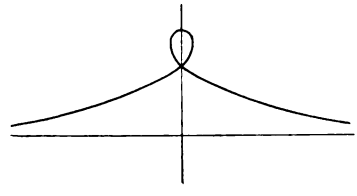
$$\frac{\sqrt{2C}}{a}\,\frac{dx}{d\varphi} = \frac{2\sin^2\varphi - 1}{\sin\varphi} = 2\sin\varphi - \frac{1}{\sin\varphi}.$$

La valeur de x s'ensuit

$$\frac{\sqrt{2C}}{a}\,x = -2\cos\varphi - \mathrm{L}\tan\frac{\varphi}{2}.$$

La constante d'intégration est telle que $x = 0$ pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$: pour cette valeur y est maximum ; φ ne peut varier que de π à 0. La courbe est symétrique par rapport à l'axe des y et asymptote à l'axe des x ; elle ne présente pas de point d'inflexion. Sa construction n'offre aucune difficulté (*fig.* 16).

Fig. 16.



Remarque. — y peut s'exprimer en fonction de l'arc s, ou mieux de la variable u déjà rencontrée. Car l'équation

$$\frac{\sqrt{2C}}{a}\,ds = \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \sqrt{\frac{2}{C}}\,du$$

donne, en choisissant la constante d'intégration

$$\mathrm{Log}\tan\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{2}{C}}\,u,$$

$$\tan\frac{\varphi}{2} = e^{u\sqrt{\frac{2}{C}}},$$

$$y = a\sqrt{\frac{2}{C}}\,\frac{2e^{u\sqrt{\frac{2}{C}}}}{1 + e^{2u\sqrt{\frac{2}{C}}}}.$$

Cette dernière formule remplacerait la formule (h) et montre que pu a été remplacée par des exponentielles.

3° $h = 1$. — Ce cas ne donne que des solutions imaginaires, le cosinus $\frac{dx}{ds}$ ayant une valeur supérieure à l'unité par la formule (g).

III. — MOUVEMENT D'UN PROJECTILE DANS UN MILIEU OU LA RÉSISTANCE EST PROPORTIONNELLE AU CUBE DE LA VITESSE.

Ce problème a été, pour la première fois, étudié par M. Greenhill dans un Mémoire dont la traduction, due au capitaine Gossot, a été publiée par la *Revue Maritime et Coloniale*, t. CV. Ce Mémoire est accompagné de Tables numériques que nous ne pouvons reproduire ici; on y trouvera les valeurs de la fonction $p(u;\ 0,\ 1)$.

Mise en équation. — Je choisirai comme axes la verticale Oy, dirigée dans le sens de la pesanteur et une droite Ox, faisant avec l'horizon un angle φ, qui sera déterminé plus tard. La résistance de l'air, dirigée suivant la tangente à la trajectoire, sera représentée par $-mg\left(\frac{v}{w}\right)^3$, en désignant par m la masse du point matériel, par g l'accélération due à la pesanteur, par v la vitesse et par w une constante que M. Greenhill appelle la *vitesse terminale;* les équations du mouvement seront, après division des deux membres par m,

$$(k)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -g\dfrac{v^3}{w^3}\dfrac{dx}{ds}, \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -g\dfrac{v^3}{w^3}\dfrac{dy}{ds} + g. \end{cases}$$

Éliminons les termes qui contiennent v^3

$$(l)\qquad \frac{dx}{ds}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{dy}{ds}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = g\frac{dx}{ds}.$$

Pour transformer cette équation, on introduit comme inconnue auxiliaire le coefficient angulaire p de la tangente

$$p = \frac{dy}{dx}.$$

Elle devient ainsi

$$(m) \qquad \frac{dp}{dt}\frac{dx}{dt} = g.$$

Elle est évidemment commune à toutes les lois de résistance puisque le terme où figure la résistance avait été d'abord éliminé. La vitesse v sera donnée par la formule

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - 2\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}\sin\varphi,$$

ou

$$(n) \qquad v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 (1 + p^2 - 2p\sin\varphi).$$

La première équation (k) peut alors s'écrire, en tenant compte de (m) et de (n),

$$w^3\left(\frac{dx}{dt}\right)^{-4}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{dp}{dt}(1 - 2p\sin\varphi + p^2),$$

d'où, en intégrant et choisissant la constante d'intégration, de manière que $p = 0$ pour $\frac{dx}{dt} = \infty$

$$(o) \qquad \frac{w^3}{3}\left(\frac{dx}{dt}\right)^{-3} = \frac{p^3}{3} - p^2\sin\varphi + p.$$

La formule (n) montre que v est aussi infinie pour $p = 0$; à ce moment la tangente à la trajectoire est parallèle à Ox.

Posons, pour un instant,

$$\frac{p^3}{3} - p^2\sin\varphi + p = \frac{1}{3}\,\mathrm{P}.$$

L'équation (o) s'écrit

$$(p) \qquad \frac{dx}{dt} = w\,\mathrm{P}^{-\frac{1}{3}},$$

ou

$$\frac{dx}{dt}\frac{dp}{dt} = w\,\mathrm{P}^{-\frac{1}{3}},$$

ou, en tenant compte de (m),

$$g\frac{dx}{dp}\frac{\mathrm{P}^{\frac{1}{3}}}{w} = w\,\mathrm{P}^{-\frac{1}{3}},$$

ou, enfin,

$$(q) \qquad \frac{gx}{w^2} = u = \int_0^p P^{-\frac{2}{3}}\,dp,$$

l'origine des abscisses est choisie de manière à avoir en même temps $p = 0$ et $x = 0$.

Pour calculer y, je remarque que

$$dy = p\,dx,$$

donc

$$(r) \qquad \frac{gy}{w^2} = \int_0^p p\,P^{-\frac{2}{3}}\,dp,$$

avec la convention que $y = 0$ pour $p = 0$. Les formules (q) et (r) qui donnent x et y en fonction d'un paramètre permettent de construire facilement la courbe. Le temps se déduira des formules (p) et (q)

$$dt = \frac{1}{w}\,dx\,P^{\frac{1}{3}} = \frac{w}{g}\,P^{-\frac{1}{3}}\,dp,$$

$$(s) \qquad \frac{gt}{w} = \int_0^p P^{-\frac{1}{3}}\,dp;$$

le temps est compté à partir du moment où le projectile est censé passer à l'origine des coordonnées.

Inversion. — Nous rencontrons ici un premier et très intéressant exemple de l'application des fonctions elliptiques à l'intégration d'une expression où figure un radical d'ordre supérieur au second [1].

On pose

$$z = \frac{P^{\frac{1}{3}}}{3p},$$

d'où

$$4z^3 - g_3 = \frac{4p^2 - 12p\sin\varphi + 12 - 27p^2 g_3}{27p^2},$$

---

[1] On peut prévoir que cette introduction réussira en posant $y = P^{\frac{1}{3}}$ et en remarquant que, la courbe $y^3 = x^3 - 3x^2\sin\varphi + 3x$ étant une cubique sans point double, l'intégration dépend certainement des fonctions elliptiques, d'après un théorème énoncé page 81.

et l'on détermine g_3 par la condition que le numérateur soit un carré parfait, ce qui donne

$$g_3 = \frac{4 - 3\sin^2\varphi}{27},$$

$$4z^3 - g_3 = \frac{(2 - p\sin\varphi)^2}{9p^2},$$

$$(t) \qquad \sqrt{4z^3 - g_3} = \frac{\sin\varphi}{3} - \frac{2}{3p},$$

$$\frac{6z^2\,dz}{\sqrt{4z^3 - g_3}} = \frac{2\,dp}{3p^2},$$

et, enfin,

$$\frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_3}} = \frac{dp}{p^{\frac{2}{3}}}.$$

L'équation (q) devient donc

$$(q') \qquad \frac{gx}{w^2} = u = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_3}};$$

cette équation définit z en fonction de u

$$z = \mathrm{p}(u;\, 0,\, g_3) = \mathrm{p}\,u.$$

On en déduit

$$-\sqrt{4z^3 - g_3} = \mathrm{p}'u,$$

et, en portant dans l'équation (t),

$$(t') \qquad p = \frac{2}{\sin\varphi - 3\mathrm{p}'u},$$

qu'on peut écrire

$$p = \frac{2}{3}\,\frac{1}{\mathrm{p}'v - \mathrm{p}'u},$$

en posant

$$\mathrm{p}'v = \mathrm{p}'\frac{ga}{w} = \frac{1}{3}\sin\varphi,$$

d'où

$$4\mathrm{p}^3v - g_3 = \frac{1}{9}\sin^2\varphi, \qquad \mathrm{p}v = \frac{1}{3}.$$

Ces deux équations déterminent un argument v ou une abscisse a et l'on voit que, pour $x = a$, $p = \infty$, ce qui donne l'asymptote verticale de la courbe; on va d'ailleurs vérifier que cette valeur a rend bien y infinie.

L'équation (r) donne, en effet,

$$(r') \qquad \frac{gy}{w^2} = \frac{2}{3}\int_0^u \frac{du}{p'v - p'u}.$$

Pour intégrer cette expression nous appliquerons la méthode générale donnée au début du Chapitre V

$$\frac{1}{p'v - p'u} = \frac{p'v + p'u}{p'^2 v - p'^2 u} = \frac{p'v + p'u}{4p^3 v - g_3 - (4p^3 u - g_3)} = \frac{p'v + p'u}{4(p^3 v - p^3 u)}.$$

Or on voit facilement que, α désignant une racine cubique imaginaire de l'unité,

$$\frac{1}{4(p^3 v - p^3 u)} = \frac{\frac{3}{4}}{pv - pu} + \frac{\frac{3}{4}\alpha}{\alpha pv - pu} + \frac{\frac{3}{4}\alpha^2}{\alpha^2 pv - pu}.$$

D'autre part, la formule (67) d'homogénéité s'écrit, en y remplaçant successivement μ par les deux racines cubiques imaginaires de l'unité α^2 et $\beta^2 = \alpha$,

$$(u) \qquad \begin{cases} \alpha^2 p(\alpha u;\, 0,\, g_3) = p(u;\, 0,\, g_3) & \text{ou} \quad p\alpha v = \alpha p v, \\ \alpha p(\alpha^2 u;\, 0,\, g_3) = p(u;\, 0,\, g_3) & \qquad\quad p\alpha^2 v = \alpha^2 p v; \end{cases}$$

et cette heureuse circonstance que $g_2 = 0$ en même temps que $\alpha^3 = \beta^3 = 1$ permet de conserver des fonctions pu aux mêmes invariants dans les deux membres de l'équation d'homogénéité. Grâce à cette circonstance, l'équation précédemment obtenue par la décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples pourra s'écrire

$$(v) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{p'v - p'u} = (p'v + p'u)\left[\dfrac{3}{4(pv - pu)}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{3\alpha}{4(p\alpha v - pu)} + \dfrac{3\alpha^2}{4(p\alpha^2 v - pu)}\right]. \end{cases}$$

Reportons-nous maintenant à la formule (40) en y écrivant $-v$ au lieu de v, $\zeta' v = -pv$ au lieu de $\zeta'(-v)$ et $-\zeta'' v = p'v$ au lieu de $\zeta''(-v)$; elle se présente ainsi

$$(x) \qquad \zeta(u - v) = \zeta u - \zeta v + \frac{1}{2}\,\frac{p'u + p'v}{pu - pv}.$$

Mais en dérivant les formules (u) on voit que

$$p'(\alpha v) = p' v,$$
$$p'(\alpha^2 v) = p' v,$$

et chacune des trois fractions qui constitue le second membre de l'équation (v) est bien du type qui figure au second membre de l'équation (x). L'équation (v) peut donc s'écrire

$$\frac{1}{p'v - p'u} = \frac{3}{2}[\zeta(v-u) - \zeta v$$
$$+ \alpha\zeta(\alpha v - u) - \alpha\zeta\alpha v + \alpha^2\zeta(\alpha^2 v - u) - \alpha^2\zeta\alpha^2 v];$$

les termes en ζu ont disparu à cause de la relation connue

$$1 + \alpha + \alpha^2 = 0.$$

Les termes en ζv se simplifient en s'appuyant sur la formule d'homogénéité relative aux ζ (76) dans laquelle on a remplacé μ par α^2 et par β^2

$$\zeta\alpha v = \frac{1}{\alpha}\zeta v,$$

$$\zeta\alpha^2 v = \frac{1}{\alpha^2}\zeta v.$$

La valeur de $\frac{gy}{w^2}$ devient enfin

$$(r'') \quad \frac{gy}{w^2} = \int_0^u [\zeta(v-u) + \alpha\zeta(\alpha v - u) + \alpha^2\zeta(\alpha^2 v - u) - 3\zeta v]\, du,$$

ou, en effectuant l'intégration,

$$(r''') \quad \frac{gy}{w^2} = -\log\sigma(v-u) - \alpha\log\sigma(\alpha v - u) - \alpha^2\log\sigma(\alpha^2 v - u) - 3u\zeta v,$$

la constante d'intégration et les déterminations des logarithmes sont choisies de manière que $y = 0$ pour $u = 0$.

Cette expression montre bien que y est infinie quand on fait $x = a$ ou, ce qui revient au même, $u = \pm v$. Malheureusement elle est entachée d'imaginaires et la discussion en est pénible (*voir* HALPHEN, t. I, p. 151).

Nous nous bornerons ici à tirer des formules auxquelles nous sommes parvenus quelques résultats intéressants tant au point de

vue du problème actuel qu'au point de vue de la théorie générale.

Il est d'abord de toute nécessité de revenir sur le choix qui a été fait des axes de coordonnées. Résumons les hypothèses faites : le temps est compté à partir du moment où le mobile est censé passé à l'origine des coordonnées. A ce moment $p = 0$, c'est-à-dire que l'axe des x est tangent à la trajectoire; mais les formules (n) et (o) nous montrent qu'à ce moment la vitesse devrait être infinie. Il importe avant tout de montrer que l'origine des coordonnées se trouve bien à distance finie. Voici comment M. Greenhill a résolu cette difficulté. Le point où la vitesse est minimum peut être obtenu par d'autres méthodes et en prenant comme origine des coordonnées le point le plus haut de la trajectoire; calculons ici les coordonnées de ce point; si elles sont finies, notre origine sera à distance finie du point de vitesse minimum, et par suite du sommet de la trajectoire. La formule (n) peut s'écrire, en tenant compte de l'équation (p),

$$v^2 = w^2 P^{-\frac{2}{3}}(p^2 - 2p\sin\varphi + 1).$$

Prenons la différentielle logarithmique des deux membres

$$\frac{d(v^2)}{v^2} = 2\left(\frac{p - \sin\varphi}{p^2 - 2p\sin\varphi + 1} - \frac{p^2 - 2p\sin\varphi + 1}{p^3 - 3p^2\sin\varphi + 3p}\right).$$

Cette différentielle doit être nulle, ce qui donne

$$(y) \qquad p^2\cos^2\varphi + p\sin\varphi - 1 = 0.$$

Or le coefficient angulaire p de la tangente peut s'exprimer en fonction de l'angle β que fait cette droite avec Ox

$$p = \frac{\sin\beta}{\cos(\varphi - \beta)};$$

en portant cette valeur dans l'équation précédente, elle devient

$$\operatorname{tang} 2\beta = -2\cot\varphi,$$

et donne pour β deux valeurs qui diffèrent entre elles de 90°. La valeur positive de $\operatorname{tang}\beta$ est seule à considérer comme correspondant à la partie utile de la trajectoire. La formule (t') fait con-

naître la valeur de u_0 correspondante (*fig.* 17)

$$p'^2 u_0 = \frac{(p \sin\varphi - 2)^2}{9p^2} = \frac{p^2 - 4p\sin\varphi + 4}{9p^2}.$$

Cette équation peut s'écrire en tenant compte de l'équation (y)

$$p'^2 u_0 = \frac{4 - 3\sin^2\varphi}{9},$$

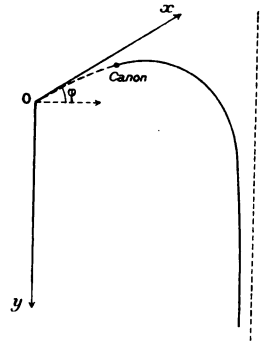
et enfin, en se reportant à la définition de g_3, page 124,

$$p'^2 u_0 = 3g_3;$$

d'où

$$(z) \qquad \begin{cases} 4p^3 u_0 = p'^2 u_0 + g_3 = 4g_3, \\ p^3 u_0 = g_3. \end{cases}$$

Fig. 17.



Or la formule (57) d'addition conduit en faisant tendre v vers u à la formule de duplication

$$(84) \qquad p2u + 2pu = \frac{1}{4}\frac{p''^2 u}{p'^2 u} = \frac{1}{4}\frac{(6p^2 u - \frac{1}{2}g_2)^2}{4p^3 u - g_2 pu - g_3}.$$

Appliquons cette formule pour $u = u_0$ et $g_2 = 0$

$$p2u_0 + 2pu_0 = \frac{9p^4 u_0}{3g_3} = 3pu_0.$$

On a donc, en désignant par $2\omega_1$ la période réelle,

$$p2u_0 = pu_0 = p(2\omega_1 - u_0),$$

d'où

$$(aa) \qquad u_0 = \frac{2}{3}\omega_1,$$

et, à cause de (z),

$$\wp\left(\frac{2}{3}\omega_1\right) = \sqrt[3]{g_3}, \qquad \wp'\frac{2}{3}\omega_1 = -\sqrt{3g_3}.$$

Il faut mettre le signe — devant $\sqrt{3g_3}$, parce que, entre zéro et ω_1, $\wp' u$ est négative.

La valeur de u_0, et par suite celle de x_0, est donc finie, p est aussi finie et il suffit de considérer la formule (r) et de remarquer que P ne s'annule pas, si ce n'est lorsque $p = 0$, pour voir que y_0 est aussi finie. Il est donc bien prouvé que le point de vitesse minimum est à distance finie par rapport à notre origine des coordonnées.

L'étude plus détaillée du problème nous fournira l'occasion de plusieurs remarques intéressantes :

1° *Construction d'une Table.* — La remarque suivante a une portée générale : la formule d'homogénéité (67)

$$\wp(u;\, 0,\, g_3) = m^2\, \wp\left(mu;\, 0,\, \frac{g_3}{m^6}\right)$$

permet de remplacer la fonction $\wp(u;\, 0,\, g_3)$ par une fonction $\wp_1(mu;\, 0,\, 1)$ à condition de prendre

$$m = \sqrt[6]{g_3},$$

et pour variable $u\sqrt[6]{g_3}$ au lieu de u. Nous obtenons ainsi ce résultat très intéressant que *toute fonction* $\wp u$ *aux invariants* 0 *et* g_3 *peut être, par un simple changement de variable, ramenée à une fonction analogue aux invariants* 0 *et* 1. La formule de transformation est

$$(85) \qquad \wp(u;\, 0,\, g_3) = \sqrt[3]{g_3}\, \wp(u\sqrt[6]{g_3};\, 0,\, 1).$$

Les deux invariants de la dernière fonction étant 0 et 1, il ne reste que l'argument de variable dans cette fonction dont il est alors possible de construire des Tables à simple entrée.

Ces Tables présentent d'autant plus d'intérêt que dans le cas

actuel le discriminant est négatif et que l'emploi des Tables de Legendre est plus compliqué.

Appliquons ce résultat au point de vitesse minimum : soit p_1 la fonction à invariants 0, 1. Nous trouvons, en rapprochant (z) et (85),

$$p_1^3 u_0 \sqrt[6]{g_3} = 1,$$

et, comme $u_0 = \frac{2}{3}\omega_1$,

$$p_1^3\left(\frac{2}{3}\omega_1 \sqrt[6]{g_3}\right) = 1.$$

$2\omega_1\sqrt[6]{g_3}$ est d'ailleurs égale à la période réelle $2\Omega_1$ de $p_1 u$.

Considérations sur le point M_0 de vitesse minimum. Intégrales pseudo-elliptiques. — Examinons d'abord un cas particulier : le projectile est censé lancé horizontalement, l'angle φ est nul. Les formules de la page 124 nous apprennent alors que $p'v = 0$, $v = \omega_1$, $e_1 = \frac{1}{3}$, $g_3 = \frac{4}{27}$. L'équation (r') devient

$$\left(\frac{gy}{w^2}\right)_{\varphi=0} = -\frac{2}{3}\int_0^u \frac{du}{p'u} = -\frac{2}{3}\int_0^u \frac{p'u\,du}{4p^3u - g_3},$$

et y s'exprime ici par les fonctions élémentaires : il suffit de poser

$$pu = z,$$

pour obtenir une intégrale de fraction rationnelle

$$\frac{gy}{w^2} = -\frac{2}{3}\int_\infty^z \frac{dz}{4z^3 - g_3}.$$

Il n'est pas utile de développer cette intégrale qui reste évidemment finie pour $z = \infty$.

En comparant l'intégrale elliptique précédente à la formule (r''') dans laquelle il faut faire $v = \omega_1$ d'où $\zeta v = \eta_1$, on obtient l'identité suivante, qui convient à tous les cas où $g_2 = 0$:

$$(bb)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{2}{3}\int_0^u \frac{du}{p'u} &= \log\sigma(\omega_1 - u) + \alpha\log\sigma(\alpha\omega_1 - u) \\ &\quad + \alpha^2\log\sigma(\alpha^2\omega_1 - u) + 3\eta_1 u, \end{aligned}\right.$$

et il ne faut pas oublier que l'intégrale qui figure ici est pseudo-

elliptique. Le second membre peut être obtenu autrement : pour cela, intégrons par rapport à v la formule d'addition des ζ dans laquelle on a remplacé u par $-u$

$$\frac{1}{2}\frac{p'u+p'v}{pv-pu}=\zeta(-u+v)-\zeta v+\zeta u,$$

$$\int\frac{1}{2}\frac{p'u+p'v}{pv-pu}dv=\log\sigma(v-u)-\log\sigma v+v\zeta u,$$

et remplaçons dans cette formule v successivement par αv et $\alpha^2 v$ en nous rappelant que $p\alpha v=\alpha pv$, $p(\alpha^2 v)=\alpha^2 pv$, $p'(\alpha^2 v)=p'\alpha v=p'v$, nous avons

$$\int\frac{1}{2}\frac{p'u+p'v}{\alpha^2 pv-pu}dv=\log\sigma(\alpha^2 v-u)-\log\sigma\alpha^2 v-\alpha^2 v\zeta u,$$

$$\int\frac{1}{2}\frac{p'u+p'v}{\alpha pv-pu}dv=\log\sigma(\alpha v-u)-\log\sigma\alpha v-\alpha v\zeta u,$$

et, en ajoutant les trois équations précédentes membre à membre après multiplication de la seconde par α^2 et de la troisième par α,

$$\frac{3}{2}\int\frac{p'v+p'u}{p^3v-p^3u}pu\,pv\,dv$$
$$=\log\sigma(v-u)+\alpha\log\sigma(\alpha v-u)+\alpha^2\log\sigma(\alpha^2 v-u)+\text{const.}$$

Pour écrire cette dernière formule, il a fallu aussi observer que par suite de l'homogénéité

$$\sigma\alpha u=\alpha\sigma u,$$
$$\sigma\alpha^2 u=\alpha^2\sigma u.$$

Supposons que ω_1 soit la limite inférieure de l'intégrale; nous aurons

$$\frac{3}{2}\int_{\omega_1}^{v}\frac{p'v+p'u}{p^3v-p^3u}pu\,pv\,dv=6\int_{\omega_1}^{v}\frac{1}{p'v-p'u}pu\,pv\,dv$$
$$=\log\sigma(v-u)+\alpha\log\sigma(\alpha v-u)+\alpha^2\log\sigma(\alpha^2 v-u)$$
$$-\log\sigma(\omega_1-u)-\alpha\log\sigma(\alpha\omega_1-u)-\alpha^2\log\sigma(\alpha^2\omega_1-u)$$

et c'est la seconde identité que nous voulions obtenir. En la com-

parant avec (bb), on voit que

$$\log\sigma(v-u)+\alpha\log\sigma(\alpha v-u)+\alpha^2\log\sigma(\alpha^2 v-u)$$
$$=\frac{2}{3}\int_0^u\frac{du}{p'u}+6\int_{\omega_1}^v\frac{pu\,pv\,dv}{p'v-p'u}-3\eta_1 u,$$

et par suite, la valeur de y, donnée page 126, se présente ainsi

$$\frac{gy}{w^2}=3u(\eta_1-\zeta v)-\frac{2}{3}\int^u\frac{du}{p'u}+6\int_{\omega_1}^v\frac{pu\,pv\,dv}{p'v-p'u}.$$

Nous allons appliquer cette expression au calcul de l'ordonnée du point M_0 de vitesse minimum, pour lequel on a $u_0=\frac{2}{3}\omega_1$. La première intégrale étant pseudo-elliptique, le seul terme à envisager est le dernier, que je désignerai par A,

$$A=\int_{\omega_1}^v\frac{p\frac{2}{3}\omega_1\,pv\,dv}{p'v-p'\frac{4}{2}\omega_1}=6\int_{\omega_1}^v\frac{\sqrt[2]{g_3}\,pv\,dv}{p'v+\sqrt[2]{3g_3}}.$$

Or, soit

$$pv=\sqrt[3]{g_3}\,z;$$

d'où

$$p'v\,dv=\sqrt[3]{g_3}\,dz=dv\sqrt{4g_3z^3-g_3},$$
$$dz=dv\sqrt{4z^3-1}.$$

Nous aurons, comme ω_1 est la demi-période réelle pour laquelle $p\omega_1=e_1=\sqrt[3]{\frac{g_3}{4}}$,

$$A=6\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}^z\frac{\sqrt[3]{g_3^2}\,z\,dz}{\sqrt{4z^3-1}\,\sqrt{g_3}\,(\sqrt{4z^3-1}+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt[3]{g_3^2}}{\sqrt{g_3}}B.$$

Or, l'intégrale que je viens de désigner par B a été rencontrée par Euler, qui a montré qu'elle se réduisait aux fonctions élémentaires; c'est donc encore une intégrale pseudo-elliptique. Nous allons vérifier ce très curieux résultat.

Les deux égalités suivantes, dont nous laisserons au lecteur le

soin de faire la vérification facile, donneront la solution

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\log\frac{\sqrt{4z^3-1}+\sqrt{3}(2z-1)}{\sqrt{4z^3-1}+\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{4z^3-1}} + \frac{3(z+1)}{(\sqrt{4z^3-1}+\sqrt{3})\sqrt{4z^3-1}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{d}{dz}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{4z^3-1}+\sqrt{3}(z+1)}{3z} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{4z^3-1}} + \frac{3(z-1)}{(\sqrt{4z^3-1}+\sqrt{3})\sqrt{4z^3-1}}.$$

Il suffit d'ajouter membre à membre et d'intégrer à partir de la limite $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ pour obtenir B.

$$B = \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{4z^3-1}+\sqrt{3}(2z-1)}{\sqrt{4z^3-1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{4z^3-1}+\sqrt{3}(z+1)}{3z}$$

$$-\frac{1}{2}\log(\sqrt[3]{2}-1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{1+\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}.$$

Les détails du calcul n'offrent plus d'intérêt et nous nous bornerons à transcrire le résultat définitif obtenu en revenant aux fonctions $\wp$ par la substitution $z = \wp(v;\, 0,\, 1)$,

$$(cc)\quad \frac{gy_0}{w^2} = \frac{2}{3}\omega_1\eta_1 - 2\omega_1\zeta v + \frac{1}{2}\log\wp\left(v-\frac{2}{3}\omega_1\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tang}\wp'\left(v-\frac{2}{3}\omega_1\right).$$

Calcul du temps. — Le calcul du temps donne lieu à des remarques analogues au calcul de l'ordonnée. La formule (s) donne

$$\frac{gt}{w} = \int_0^p P^{-\frac{1}{3}}\,dp.$$

L'élément différentiel actuel se déduit de celui qui figure dans y en multipliant par $\frac{P^{\frac{1}{3}}}{p} = 3z$; donc

$$\frac{gt}{w} = 2\int_0^u \frac{\wp u\,du}{\wp' v - \wp' u}.$$

A titre d'exercice, je vais encore intégrer cette expression : pour cela, reportons-nous à l'équation (v); nous voyons qu'on aura

$$\frac{\wp u}{\wp' v - \wp' u} = (\wp' v + \wp' u)\left[\frac{3\wp u}{4(\wp v - \wp u)} + \frac{3\alpha\wp u}{4(\alpha\wp v - \wp u)} + \frac{3\alpha^2}{4(\alpha^2\wp v - \wp u)}\right].$$

Or, le crochet peut évidemment s'écrire, en y ajoutant et retranchant $\frac{3}{4}(1+\alpha+\alpha^2)=0$,

$$\frac{3p v}{4(p v - p u)} + \frac{3\alpha^2 p v}{4(\alpha p v - p u)} + \frac{3\alpha p v}{4(\alpha^2 p v - p u)}.$$

L'intégration est donc la même que celle rencontrée dans le calcul de y, à des facteurs constants près. Si l'on remarque que $3pv=1$, on aura immédiatement le résultat

$$\frac{gt}{w} = -\log\sigma(v-u) - \alpha^2\log\sigma(\alpha v - u) - \alpha\log\sigma(\alpha v - u) + \text{const.}$$

avec la condition que $t=0$ pour $u=0$.

La valeur de t pour $u=\frac{2}{3}\omega_1$ est aussi pseudo-elliptique et est donnée par l'égalité suivante, que je me borne à énoncer :

$$\frac{gt_0}{w} = 2v\eta_1 - \frac{2}{3}\omega_1\eta_1 + \frac{1}{2}\log p\left(v-\frac{2}{3}\omega_1\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tang} p'\left(v-\frac{2}{3}\omega_1\right).$$

IV. — PENDULE SPHÉRIQUE [1].

Le pendule sphérique se compose d'un point matériel assujetti à rester à une distance constante d'un point fixe O, que nous prendrons pour origine des coordonnées, l'axe des z étant supposé vertical et dirigé vers le bas. Les données sont : la longueur l du fil qui retient le point matériel m sur la sphère de centre O, la masse du point que nous prendrons pour unité de masse; l'accélération g due à la pesanteur; la hauteur initiale du point, z_0; enfin, la vitesse initiale v_0 qu'on suppose dirigée tangentiellement à la sphère et dont on donne la composante suivant Oz, $\frac{\partial z_0}{\partial p}$.

Nous emploierons des coordonnées semi-polaires, c'est-à-dire que nous poserons

$$x = r\cos\psi,$$
$$y = r\sin\psi,$$

r et ψ étant les coordonnées polaires de la projection horizontale

---

[1] *Voir* APPELL, *Traité de Mécanique*, t. I, p. 185.

du pendule. Les équations du problème seront

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

ou

$$(\alpha) \qquad r^2 + z^2 = l^2,$$

$$(\beta) \qquad r^2\, d\psi = c\, dt,$$

qui est fournie par le théorème des aires, et

$$(\gamma) \qquad v^2 = h + 2gz, \qquad h = v_0^2 - 2gz_0,$$

qu'on déduit du théorème des forces vives, applicable au cas actuel.

L'équation (γ) s'écrit

$$dr^2 + r^2\, d\psi^2 + dz^2 = (h + 2gz)\, dt^2$$

ou, à cause de (α) et de (β),

$$\frac{z^2\, dz^2}{l^2 - z^2} + \frac{c^2\, dt^2}{l^2 - z^2} + dz^2 = (h + 2gz)\, dt^2,$$

$$\frac{l^2\, dz^2}{l^2 - z^2} = \left(h + 2gz - \frac{c^2}{l^2 - z^2}\right) dt^2$$

ou enfin, en posant

$$(\delta) \qquad \varphi(z) = (h + 2gz)(l^2 - z^2) - c^2,$$

$$(\varepsilon) \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{l}\sqrt{\varphi(z)}.$$

Cette équation permettra d'exprimer la constante c des aires, en fonction des données g, l, v_0, z_0 et $\frac{\partial z_0}{\partial t}$ [1]. Ces données sont telles évidemment qu'au début $\frac{\partial z_0}{\partial t}$ soit réelle; z_0 donne donc le signe

---

[1] En fait, il est plus commode, pour la discussion, de donner l'angle ε que fait la direction de la vitesse initiale avec la perpendiculaire au plan vertical M_0Oz, d'où part le pendule. On a alors

$$v_0 \cos\varepsilon = r\frac{d\psi}{dt} = \frac{c}{r},$$

et c'est cette équation qui détermine c. Le cas du pendule simple correspond à $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, $c = 0$.

plus dans $\varphi(z)$, $-l$ donne le signe $-$, $+l$ le signe $-$, $+\infty$ le signe $-$. Les nombres $-\infty$, $-l$, z_0, $+l$, $+\infty$ séparent donc les racines z_1, z_2, z_3 de $\varphi(z)$ et, si l'on désigne par z_3 la plus grande, par z_1 la plus petite, par z_2 l'intermédiaire, on aura

$$z_1 < -l < z_2 < z_0 < z_3 < l \quad (^1).$$

Il est évident que z doit rester compris entre z_2 et z_3. D'ailleurs l'équation (ε) montre que z s'exprimera en fonction elliptique de t; nous allons faire l'inversion en introduisant la fonction pu qui se présente ici naturellement. Il faut d'abord remplacer $\varphi(z)$ par un polynome privé de second terme et dans lequel la plus haute puissance de l'inconnue ait pour coefficient 4. Nous poserons

$$z = Ms + N;$$

l'équation (ε) devient alors

$$(\zeta) \qquad M^2 \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{1}{\rho^2}\varphi(Ms + N).$$

Il suffit de poser

$$M = -\frac{2l^2}{g}, \qquad N = -\frac{h}{6g}$$

pour obtenir la forme cherchée

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3} = \sqrt{S}.$$

Alors s sera donnée par l'équation

$$s = p(t + \alpha),$$

α étant une constante; je ne transcrirai pas les valeurs des invariants g_2 et g_3, faciles à calculer.

On aura ainsi pour z la valeur

$$z = -\frac{2l^2}{g}p(t + \alpha) - \frac{h}{6g}.$$

Pour déterminer la constante α, je supposerai que les temps

---

(1) On ne peut jamais avoir $z_2 = -l$, ni $z_3 = l$; sans quoi on aurait $c = 0$, et le mouvement serait simplement plan.

sont comptés à partir du moment où le pendule est au plus haut de sa course; z aura sa valeur maximum z_3 et en même temps s sa valeur minimum. Mais la valeur minimum de s annule $\frac{\partial s}{\partial t}$; c'est la plus petite racine e_2 de S, et l'on doit avoir

$$p\alpha = e_2$$

ou

$$\alpha = \omega_2.$$

Si t croît à partir de zéro, z décroîtra [*voir* variation de pu (*fig.* 3)] et atteindra son minimum pour $t = \omega_1$; à ce moment s ou $p(t + \omega_1)$ atteint son maximum e_3. Donc, à des intervalles égaux à $2\omega_1$, le pendule repasse aux mêmes niveaux. Nous savons qu'en vertu de la formule (59) on peut écrire

$$(\eta) \qquad z = -\frac{2l^2}{g}\left[e_2 + \frac{(e_1 - e_2)(e_3 - e_2)}{pt - e_2}\right] - \frac{h}{6g},$$

et cette formule devra être employée pour les calculs numériques.

Calcul de ψ. — Nous allons maintenant rechercher comment varie le plan vertical, mené par Oz, qui contient le pendule.

$d\psi$ est donnée par l'équation (β), et l'on voit déjà que ψ varie toujours dans le même sens

$$d\psi = \frac{c\,dt}{l^2 - z^2} = \frac{c}{2l}\left(\frac{1}{l - z} + \frac{1}{l + z}\right) dt.$$

Posons

$$u = t + \omega_2, \qquad z = \mathrm{M}\,pu + \mathrm{N}, \qquad \text{comme page 136,}$$

$$pa = \frac{l - \mathrm{N}}{\mathrm{M}}, \qquad pb = -\frac{l + \mathrm{N}}{\mathrm{M}} \qquad (pa < pb).$$

Ces deux dernières égalités définissent a et b, au signe (et aux périodes) près, et il est bon de remarquer que la série d'inégalités

$$z_1 < -l < z_2 < z < z_3 < l$$

entraîne

$$pa < e_2 < pu < e_3 < pb < e_1;$$

pour préciser le signe, calculons $p'a$ et $p'b$. L'équation (ζ) nous donne

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = \frac{1}{\mathrm{M}^2 l^2}\varphi(\mathrm{M}\,pu + \mathrm{N});$$

pour $u = a$, on aura

$$\wp'^2 a = \left(\frac{ds}{du}\right)_a^2 = \frac{1}{M^2 l^2}\varphi(l) = -\frac{c^2}{M^2 l^2},$$

et la même valeur pour $\wp'^2 b$. On pourra donc poser

$$\wp' a = \wp' b = i\frac{c}{Ml};$$

ces valeurs imaginaires ne doivent pas étonner, puisque les valeurs correspondantes prises par z, savoir l et $-l$, sont en dehors des niveaux que peut atteindre le pendule. Avec ces données, la valeur de $d\psi$ précédemment écrite se présente ainsi

$$i\,d\psi = \frac{1}{2}\left(\frac{\wp' b}{\wp u - \wp b} - \frac{\wp' a}{\wp u - \wp a}\right) du;$$

d'où, en appliquant la formule (39 *bis*),

$$(\theta)\quad \left\{\begin{aligned} i\psi &= \frac{1}{2}\int [\ \zeta(u+a) - \zeta(u-a) - 2\zeta a \\ &\qquad - \zeta(u+b) + \zeta(u-b) + \zeta b\ ]\,du + \text{const.} \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{\sigma(u+a)\,\sigma(u-b)}{\sigma(u-a)\,\sigma(u+b)} + u(\zeta b - \zeta a) + \text{const.} \end{aligned}\right.$$

La constante sera déterminée, par exemple, par la condition que ψ soit nul pour $t = 0$ $(u = \omega_2)$.

Il n'y a plus qu'à remplacer u par $t + \omega_2$ pour avoir exprimé l'angle ψ en fonction du temps. A la vérité, ces formules renferment des imaginaires qu'on aurait pu ne pas introduire en employant la transformation (η) au lieu de $z = M\wp u + N$; mais l'écriture est ici plus condensée et nous n'avons pas besoin, pour l'objet que nous avons en vue, de faire disparaître les imaginaires.

Supposons que, dans la formule (θ), on augmente u de la période réelle $2\omega_1$; à cause de la première formule (29), la fraction qui figure sous le signe log se trouve multipliée par

$$\frac{e^{2\eta_1(u+a+u-b+2\omega_1)}}{e^{2\eta_1(u-a+u+b+2\omega_1)}} = e^{4\eta_1(a-b)};$$

$i\psi$ est donc augmenté de $2\eta_1(a-b) + 2\omega_1(\zeta b - \zeta a)$ et cet accroissement est évidemment une quantité purement imaginaire $i\psi_0$, comme on le vérifiera aisément en remarquant que (*fig.* 2

et 4) a est de la forme $\omega_1 + it$, b de la forme vi, et en appliquant les formules (40) et (67) où μ est pris égal à *moins un*. On voit donc que le plan vertical MOz, qui contient le pendule, tourne d'un angle ψ_0 [1] pendant que le pendule effectue en hauteur une oscillation complète. Ce résultat peut être énoncé autrement : concevons des axes tournant d'un mouvement uniforme autour de Oz, de même origine que les axes fixes, de même axe Oz et tels que le plan mobile zOx' fasse avec le plan fixe zOx un angle $\psi_1 = \frac{\psi_0 t}{2\omega_1}$; puis posons

$$\psi = \psi_1 + \psi'.$$

La fonction ψ' sera doublement périodique et aura pour période $2\omega_1$.

Remarque. — La formule (θ) peut encore s'écrire en désignant par $\frac{1}{2}\log\alpha$ la constante

$$e^{2i\psi} = \alpha \frac{\sigma(u+a)\sigma(u-b)}{\sigma(u-a)\sigma(u+b)} e^{2u(\zeta b - \zeta a)}.$$

Mouvement de la projection horizontale. Équation de Lamé. — Nous avons posé

$$x = r\cos\psi, \qquad y = r\sin\psi;$$

d'où, en appliquant les formules d'Euler (p. 6),

$$X = x + iy = re^{i\psi},$$
$$Y = x - iy = re^{-i\psi},$$
$$XY = x^2 + y^2 = r^2 = l^2 - z^2 = (l - z)(l + z) = -M^2(pu - pa)(pu - pb).$$

On voit que r^2 est une fonction doublement périodique du temps, de même période que z. z étant compris entre z_2 et z_3, r^2 variera entre $l^2 - z_2^2$ et $l^2 - z_3^2$ et ne s'annulera jamais.

On aura donc, en tenant compte de la variation de ψ, une courbe telle que celles des *fig.* 18 et 19.

D'ailleurs, les trois équations rencontrées dans le courant de

---

[1] Cet angle est toujours compris entre π et 2π. *Voir* HALPHEN, t. II, p. 128.

notre étude

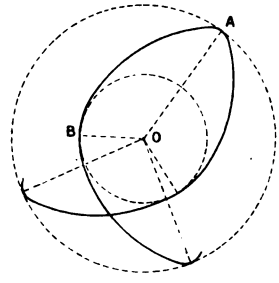
$$r^2\,d\psi = c\,dt,$$

$$r^2 = l^2 - z^2 \qquad \text{d'où} \qquad -\frac{r\,dr}{\sqrt{l^2 - r^2}} = dz,$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{l}\sqrt{\varphi(z)},$$

permettent d'obtenir, en coordonnées polaires r et ψ, l'équation différentielle de la courbe.

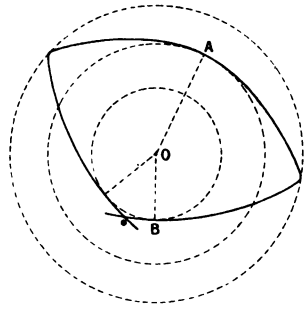
Fig. 18.



Cas où les deux parallèles extrêmes sont au-dessous du point de suspension.

Dans le cas des petites oscillations, v_0 est très petit et z_0 très

Fig. 19.



Le parallèle le plus haut est au-dessus du point de suspension : le cercle extérieur tracé sur la figure est le grand cercle horizontal de la sphère.

voisin de l, la courbe ci-dessus se réduit sensiblement à une ellipse (Poisson, t. I, p. 395).

Revenons au calcul de X et Y : le quotient $\frac{X}{Y}$ a pour valeur

$e^{2i\psi}$ et, comme on a déjà obtenu le produit, on a

$$X^2 = -M^2 e^{2i\psi}(pu - pa)(pu - pb),$$
$$Y^2 = -M^2 e^{-2i\psi}(pu - pa)(pu - pb).$$

On vient de trouver $e^{2i\psi}$; la formule (32) donne

$$pu - pa = -\frac{\sigma(u-a)\sigma(u+a)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 a},$$

$$pu - pb = -\frac{\sigma(u-b)\sigma(u+b)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 b}.$$

Donc enfin

$$X = x + iy = i\alpha^{\frac{1}{2}} M \frac{\sigma(u+a)\sigma(u-b)}{\sigma^2 u\,\sigma a\,\sigma b} e^{u(\zeta b - \zeta a)},$$

$$Y = x - iy = i\alpha^{-\frac{1}{2}} M \frac{\sigma(u-a)\sigma(u+b)}{\sigma^2 u\,\sigma a\,\sigma b} e^{-u(\zeta b - \zeta a)}.$$

La courbe étant déjà discutée, ces valeurs de X et de Y ne nous serviront pas à l'étudier; nous nous bornerons à faire à leur sujet une remarque des plus intéressantes due à M. Hermite (*Sur quelques applications des fonctions elliptiques*).

La dérivée logarithmique de X a pour expression

$$\frac{1}{X}\frac{dX}{du} = \zeta(u+a) + \zeta(u-b) - 2\zeta u + \zeta b - \zeta a$$
$$= \frac{1}{2}\frac{p'u - p'a}{pu - pa} + \frac{1}{2}\frac{p'u + p'b}{pu - pb}$$

On en déduit, en dérivant la première ligne,

$$\frac{d}{du}\left(\frac{1}{X}\frac{dX}{du}\right) = \frac{1}{X}\frac{d^2X}{du^2} - \left(\frac{1}{X}\frac{dX}{du}\right)^2 = -p(u+a) - p(u-b) + 2pu$$

ou, en utilisant cette fois la seconde expression de $\frac{1}{X}\frac{dX}{du}$,

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{du^2} = 2pu - p(u+a) - p(u-b)$$
$$+ \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'a}{pu - pa}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{p'u + p'b}{pu - pb}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{p'u - p'a}{pu - pa}\frac{p'u + p'b}{pu - pb}.$$

La formule d'addition (57) permet de simplifier l'ensemble des cinq premiers termes et, comme $p'a = p'b$,

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{du^2} = 4pu + pa + pb + \frac{1}{2}\frac{p'^2u - p'^2a}{(pu - pa)(pu - pb)}.$$

Le numérateur de la dernière fraction s'annule pour $u = a$ et pour $u = b$; or il peut s'écrire $4(\wp^3 u - \wp^3 a) - g_2(\wp u - \wp a)$ et, comme il est divisible par $\wp u - \wp a$ et par $\wp u - \wp b$, on peut le mettre sous la forme

$$4(\wp u - \wp a)(\wp u - \wp b)(\wp u + \wp a + \wp b).$$

On aura donc finalement

$$\frac{d^2 X}{du^2} = (6\wp u + 3\wp a + 3\wp b)X = \left(6\wp u - 6\frac{N}{M}\right)X.$$

De même

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{du} = \zeta(u - a) + \zeta(u + b) - 2\zeta u + \zeta a - \zeta b.$$

Cette égalité ne diffère de celle relative à X que par le changement de a en b et de b en a. Or a et b ont disparu dans la dernière équation; donc X et Y sont deux solutions particulières de la même équation linéaire

$$(c) \qquad \frac{d^2 Z}{du^2} = (6\wp u + \gamma)Z.$$

La solution générale sera donc, d'après la théorie des équations linéaires,

$$Z = CX + C'Y = cx + c'y,$$

C, C', c, c' étant des constantes arbitraires.

L'équation (c) qu'on vient de rencontrer est un cas particulier d'une équation très célèbre dite *équation de Lamé,* qu'on rencontre dans beaucoup de questions de Physique et de Mathématiques. Elle se déduit de l'équation générale

$$\frac{d^2 Z}{du^2} = [n(n+1)\wp u + \gamma]Z$$

en y faisant $n = 2$.

L'équation de Lamé admet deux intégrales particulières de la forme

$$A e^{\lambda u} \frac{\sigma(u+a)\sigma(u+b)\ldots\sigma(u+l)}{\sigma^n u},$$

qu'on obtient en substituant cette expression dans l'équation de Lamé, pour déterminer les valeurs des $n + 1$ constantes a, b, ...,

l, λ. (*Voir,* pour plus de détails, les *Traités d'Analyse,* notamment JORDAN, t. II.)

Calcul de la réaction de la tige du pendule. — Pour calculer la réaction R de la tige, supposée dirigée du centre O vers le point matériel, il suffit de remarquer qu'elle est égale à la force centrifuge $\frac{v^2}{l}$ augmentée de la projection sur le rayon OM du poids g du pendule,

$$(\lambda) \qquad R = \frac{v^2}{l} + \frac{gz}{l} = \frac{h + 3gz}{l},$$

en utilisant immédiatement l'équation des forces vives.

Si la tige est supposée solide, le sens de la réaction sera indifférent, sinon il faudra examiner le signe. Comme $z = Mpu + N$ et $h = -6gN$, on aura

$$R = -\frac{3g(N - Mpu)}{l} = -\frac{3g[l - M(pu + pa)]}{l};$$

or

$$pa - pb = \frac{2l}{M};$$

donc

$$R = \frac{3gM(2pu + pa + pb)}{2l} = -\tau^2(2pu - \varpi)$$

avec

$$\varpi = -pa - pb = \frac{h}{6l^2}.$$

Lorsque le temps t varie de o à ω_1, u varie de ω_2 à $\omega_1 + \omega_2 = -\omega_3$ et pu de e_2 à e_3. Dans cet intervalle, la valeur de R croît constamment de la valeur $-\tau^2(2e_2 - \varpi)$ à la valeur $-\tau^2(2e_3 - \varpi)$. e_2 est négative; si la constante h des forces vives est positive ($v_0^2 - 2gz_0 > 0$), R sera positive au point le plus bas; il est d'ailleurs facile de faire voir que R est toujours positive en ce point. En effet, l'équation des forces vives nous apprend que, si le mouvement a lieu, v^2, et par suite $h + 2gz$, est toujours positive; c'est-à-dire, en remplaçant h par $-6gN$ (p. 136),

$$2g(z - 3N) > 0,$$
$$z > 3N,$$
$$Mpu + N > 3N,$$
$$pu < \frac{2N}{M}.$$

Mais il résulte de la définition de pa et pb que

$$\frac{2N}{M} = -pa - pb.$$

On a donc toujours

$$pu + pa + pb < 0$$

et en particulier

$$e_2 + pa + pb < 0;$$

a fortiori, puisque e_2 est négative,

$$2e_2 + pa + pb < 0,$$

ce qu'il fallait établir.

Mais si pu peut devenir positive, R peut changer de signe; ce cas risque de se présenter si le maximum e_3 de pu est positif. Ainsi, lorsque e_3 est positif, la tension R du fil peut changer de signe; cela arrivera, d'après la formule (λ), si $v^2 + gz$ peut s'annuler. Il faut pour cela que z soit négatif, c'est-à-dire que le pendule se trouve à un niveau plus haut que le point de suspension. Si donc, à un certain moment, le pendule se trouve plus haut que le point de suspension d'une quantité a et si, à ce moment, le carré de sa vitesse est inférieur à ga, la tension du fil changera ultérieurement de signe et, si le fil est flexible, le mouvement cessera de suivre les lois que nous venons d'étudier.

Remarque. — Les formules bien connues

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = Rx, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = Ry,$$

jointes à l'intégrale des aires qu'on peut écrire

$$x\frac{\partial y}{\partial t} - y\frac{\partial x}{\partial t} = C,$$

nous montrent que

$$\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = CR,$$

et par suite, si la réaction R s'annule, le plan osculateur de la courbe décrite par le pendule devient vertical; la projection horizontale présente donc à ce moment un point d'inflexion.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

V. — ARC DE L'ELLIPSE.

C'est la mesure de l'arc d'ellipse qui a donné son nom à toutes les fonctions de cette théorie : on y arrive de la manière la plus simple comme il suit. L'équation de l'ellipse étant

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

et $2c$ la distance focale, on pose

$$x = a\sin\varphi,$$
$$y = b\cos\varphi,$$

d'où

$$ds^2 = (b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi)\,d\varphi^2 = (a^2 - c^2\sin^2\varphi)\,d\varphi^2 = a^2(1 - k^2\sin^2\varphi)\,d\varphi^2,$$

en posant

$$k = \frac{c}{a}.$$

On a donc

$$s = a\int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = a\,\mathrm{E}(\varphi),$$

et ainsi se rencontre, dans ce problème tout à fait élémentaire, l'intégrale elliptique que Legendre a choisie pour type des intégrales de seconde espèce : le module k prend aussi une signification géométrique puisqu'il représente l'excentricité. Si l'on prend a comme unité, k est égal à c et k' à b. Les Tables de Legendre, ainsi que nous l'avons expliqué, donnent les valeurs de s, pour toutes les valeurs de φ et de l'angle modulaire $\theta = \arcsin k$, de degrés en degrés. (*Voir* notre Table III.)

Comme application numérique, calculons dans l'ellipse de demi-axes $a = 2$ et $b = \sqrt{2}$ l'arc BM compris entre le sommet B du petit axe et le point M d'abscisse 1. La limite supérieure de l'intégrale est ici

$$\varphi = \arcsin\frac{x}{a} = \arcsin\frac{1}{2} = 30^\circ,$$

$$k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{1}{2} = \sin^2\theta, \qquad \text{d'où} \qquad \theta = 45^\circ,$$

$$s = 2\int_{0^\circ}^{30^\circ} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}\,d\varphi = 2 \times 0{,}51205 = 1{,}0241.$$

Le quart de la même ellipse aurait pour valeur

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}\,d\varphi = 2\times 1,85407 = 3,70814.$$

C'est le double de l'intégrale complète relative au module $\sin 45^\circ$. Si, au contraire, on donnait s, la Table III ferait connaître φ, d'où les coordonnées de l'extrémité de l'arc.

Remarque. — A proprement parler, le problème que nous venons de traiter n'est pas une application des fonctions elliptiques; mais il n'était pas possible de passer sous silence le problème dont l'étude a conduit à tant de belles propriétés.

Au surplus, ce sont les fonctions elliptiques, et non les intégrales elliptiques, qui sont réellement maniables, de même qu'en Trigonométrie ce sont les lignes trigonométriques, sinus, cosinus, etc., et non leurs inverses qui sont le plus utiles dans les applications. Nous allons ici même en donner un exemple.

Effectuons d'abord l'inversion en introduisant les fonctions de Weierstrass et, sans entrer dans le détail du calcul, posons immédiatement [1], comme il est prescrit au Chapitre V,

$$\sin\varphi = \frac{x}{a} = \frac{a}{\sqrt{\wp(u;\, e_1, e_2, e_3) - e_2}},$$

avec les valeurs

$$e_1 = \frac{a^2+b^2}{3}, \qquad e_3 = \frac{a^2-2b^2}{3}, \qquad e_2 = -\frac{a^2+c^2}{3};$$

on trouvera pour l'arc

$$s = a^2\int_0^u \frac{\wp u - e_3}{\wp u - e_2}\,du = a^2\int_0^u\left(1+\frac{e_2-e_3}{\wp u - e_2}\right)du.$$

Mais la formule (59), si souvent employée, donne

$$\frac{e_2-e_3}{\wp u - e_2} = \frac{\wp(u+\omega_2)-e_2}{e_2-e_1}.$$

---

[1] Il est bien entendu que a, b, c représentent dans ce qui suit des nombres absolus et non des longueurs.

On a donc finalement

$$s = a^2 \int_0^u \left(\frac{\mathrm{p}(u+\omega_2)}{e_2 - e_1} - \frac{e_2 - e_1}{e_1} \right) du,$$

$$s = \frac{a^2}{e_1 - e_2} [e_1 u + \zeta(u+\omega_2) - \zeta\omega_2],$$

$$s = e_1 u + \zeta(u+\omega_2) - \zeta\omega_2,$$

$$s = e_1 u + \zeta u + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{p}' u}{\mathrm{p} u - e_2};$$

u est un argument compris entre o et ω_1.

Remarquons en passant que, si l'on remplace s par sa valeur $a\,\mathrm{E}(\varphi)$ trouvée au commencement de ce problème, on retrouve la formule (83 *bis*) :

$$a\,\mathrm{E}(\varphi) = e_1 u + \zeta u + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{p}' u}{\mathrm{p} u - e_2}.$$

Théorème de Fagnano. — Cela posé, considérons maintenant un arc s' ayant son origine au sommet du grand axe. Pour cela, comme c'est y qui doit s'annuler en même temps que s, au lieu de x, nous poserons, conformément aux indications du Chapitre V, p. 82, et en désignant par x', y' les coordonnées de l'extrémité M′ de l'arc s',

$$\cos\varphi = \frac{y'}{b} = \frac{b}{\sqrt{\mathrm{p}(u;\, e_1,\, e_2,\, e_3) - e_3}},$$

et il se trouve que c'est précisément la fonction $\mathrm{p}u$ aux mêmes racines que dans le calcul de l'arc s précédent, comme on peut le vérifier facilement. On aura alors

$$s' = b^2 \int_0^u \frac{\mathrm{p} u - e_2}{\mathrm{p} u - e_3} du = e_1 u + \zeta u + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{p}' u}{\mathrm{p} u - e_3}.$$

Si de cette valeur de s' nous retranchons la valeur de s obtenue au paragraphe précédent et si nous convenons de prendre les arcs qui correspondent à la même valeur de u, nous trouverons

$$s' - s = \frac{1}{2} \frac{(e_3 - e_2)\mathrm{p}' u}{(\mathrm{p} u - e_2)(\mathrm{p} u - e_3)},$$

ou, à cause des valeurs des racines et de $p'u$,

$$s'-s=\frac{c^2}{2}\frac{p'u}{(pu-e_2)(pu-e_3)}=c^2\sqrt{\frac{pu-e_1}{(pu-e_2)(pu-e_3)}}.$$

Il s'agit d'interpréter ce second membre en revenant aux coordonnées cartésiennes : pour cela, on peut faire en sens inverse les deux substitutions qui viennent d'être employées. Utilisons d'abord la première

$$pu-e_2=\frac{a^4}{x^2},$$

d'où

$$pu-e_1=\frac{a^4}{x^2}+e_2-e_1=\frac{a^4}{x^2}-a^2=\frac{a^2}{x^2}(a^2-x^2),$$

$$pu-e_3=\frac{a^4}{x^2}+e_2-e_3=\frac{a^4}{x^2}-c^2=\frac{a^4-c^2x^2}{x^2}.$$

On en conclut

$$s'-s=c^2\frac{xy}{b\sqrt{a^4-c^2x^2}}=\frac{c^2xy}{\sqrt{a^4y^2+b^4x^2}}.$$

Il est évident, à cause de la symétrie des calculs précédents, que la deuxième substitution aurait conduit à l'équation

$$s-s'=-\frac{c^2x'y'}{\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}},$$

par le simple échange des lettres x et y, a et b. L'interprétation géométrique est maintenant immédiate : le second membre représente la distance du centre à la normale au point x, y (ou x', y') et l'on a ce théorème :

Soient A *et* B *les sommets du grand et du petit axe,* AM *et* BN *deux arcs d'un même quadrant tels qu'à leurs extrémités les normales soient à une même distance l du centre, la différence des arcs* AM *et* BN *est précisément égale à l.*

VI. — AIRE DE L'ELLIPSOIDE.

Ce problème a été également traité par Legendre qui a donné pour expression de l'aire (*Exercices de Calcul intégral*, t. I, p. 191)

$$8S=2\pi c^2+\frac{2\pi ab}{\sin\nu}\left[\frac{c^2}{a^2}F(b',\nu)+\frac{a^2-c^2}{a^2}E(b',\nu)\right],$$

a, b, c sont les demi-axes de l'ellipsoïde, $a > b > c$,

$$\cos\nu = \frac{c}{a}, \qquad b'^2 = \frac{b^2 - c^2}{b^2 \sin^2\nu},$$

$F(b', \nu)$ et $E(b', \nu)$ sont respectivement les intégrales elliptiques de première et de seconde espèce qui correspondent au module b' et à l'argument ν.

Nous allons arriver au résultat par une méthode bien plus rapide que celle de Legendre, en utilisant les fonctions elliptiques de Weierstrass. Soit

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

l'équation de l'ellipsoïde (E); je vais évaluer l'aire $4S$ comprise entre le plan des xy et le sommet de l'axe mineur c, et d'abord l'aire $4S_\varphi$ comprise entre ce sommet et une courbe tracée sur la calotte elliptique précédente de manière que les normales à l'ellipsoïde le long de cette courbe fassent avec l'axe Oz un angle constant φ. J'appellerai h le carré du cosinus de l'angle θ que fait avec Oz la normale en un point x, y, z quelconque de l'ellipsoïde (E)

$$h = \cos^2\theta = \frac{\dfrac{z^2}{c^4}}{\dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y^2}{b^4} + \dfrac{z^2}{c^4}}.$$

La courbe le long de laquelle l'angle θ est constant se projette sur le plan des xy suivant l'ellipse

$$\frac{1}{c^2}(1-h)\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) = h\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right).$$

Soit $d\sigma$ l'élément d'aire de l'ellipsoïde compris entre deux courbes infiniment voisines qui correspondent aux valeurs h et $h + dh$ du paramètre; la projection de cet élément sur le plan des xy, savoir $d\sigma\cos\theta$, s'évalue facilement : elle est égale à la différentielle de l'aire de l'ellipse précédente. Les carrés des demi-axes de cette ellipse sont

$$A = \frac{a^2(1-h)}{c^2\left(\dfrac{h}{a^2} + \dfrac{1-h}{c^2}\right)} = \frac{a^4(1-h)}{c^2 h + a^2(1-h)}, \qquad B = \frac{b^4(1-h)}{c^2 h + b^2(1-h)}.$$

L'aire de cette ellipse aura pour expression

$$\omega = \pi\sqrt{AB} = \pi\frac{a^2b^2(1-h)}{\sqrt{[c^2h+a^2(1-h)][c^2h+b^2(1-h)]}},$$

et en différentiant on obtiendra l'équation

$$d\sigma = \frac{d\omega}{\cos\theta},$$

$$\sigma = \int_1^h \frac{d\omega}{\cos\theta} = \left(\frac{\omega}{\cos\theta}\right)_1^h - \int_1^h \frac{\omega}{\cos^2\theta}\sin\theta\, d\theta,$$

$$\sigma = \frac{\pi a^2b^2(1-h)}{\sqrt{h}\sqrt{c^2h+a^2(1-h)}\sqrt{c^2h+b^2(1-h)}}$$
$$+\pi a^2b^2\int_1^h \frac{(1-h)\,dh}{2h\sqrt{[c^2h+a^2(1-h)][c^2h+b^2(1-h)]}\,h}.$$

Le coefficient différentiel s'écrit, après multiplication par $\sqrt{a^2-c^2}\sqrt{b^2-c^2}$,

$$\frac{(1-h)\,dh}{2h\sqrt{h\left[h-\frac{a^2}{a^2-c^2}\right]\left[h-\frac{b^2}{b^2-c^2}\right]}}.$$

Posons

$$e_2 = -\frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{a^2-c^2}+\frac{b^2}{b^2-c^2}\right) = \frac{1}{3}\frac{\rho^4-3a^2b^2}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)},$$

$$\rho^4 = a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2,$$

$$e_1 = e_2+\frac{b^2}{b^2-c^2} = \frac{1}{3}\frac{\rho^4-3b^2c^2}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)},$$

$$e_3 = e_2+\frac{a^2}{a^2-c^2} = \frac{1}{3}\frac{\rho^4-3a^2c^2}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)} \qquad (e_1>e_3>e_2),$$

$$p'u = -2\sqrt{(pu-e_1)(pu-e_2)(pu-e_3)},$$

$$h = pu-e_2;$$

le coefficient différentiel devient

$$\frac{(1+e_2-pu)\,du}{pu-e_2},$$

et les limites sont pour u une valeur u_0 telle que

$$pu_0 = 1+e_2$$

et u.

On aura donc, en laissant h dans le premier terme,

$$\sigma = \frac{\pi a^2 b^2 (1-h)}{\sqrt{[c^2 h + a^2(1-h)][c^2 h + b^2(1-h)]h}} + \frac{\pi a^2 b^2}{\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}} \int_{u_0} \frac{1+e_2-pu}{pu-e_2} du.$$

Mais il faut remarquer que $1+e_2$ est compris entre e_2 et e_3; pu devant être compris entre ces limites, u aura la forme $\omega_2 + v$ et il convient de faire la substitution

$$u = \omega_2 + v$$

pour éliminer les imaginaires. Alors l'équation

$$pu_0 = 1 + e_2$$

se transforme en

$$p(\omega_2 + v_0) - e_2 = \frac{(e_1-e_2)(e_3-e_2)}{pv_0 - e_2} = 1$$

ou

$$pv_0 = \frac{\rho^4}{3(a^2-c^2)(b^2-c^2)}$$

et l'intégrale

$$\int_{u_0}^{u} \left(\frac{1}{pu-e_2} - 1\right) du = \int_{v_0}^{v} \left[\frac{pv-e_2}{(e_1-e_2)(e_3-e_2)} - 1\right] dv$$
$$= \frac{(b^2-c^2)(a^2-c^2)}{a^2 b^2} \int_{v_0}^{v} (pv - pv_0)\, dv$$
$$= \frac{(b^2-c^2)(a^2-c^2)}{a^2 b^2} [(v_0 - v)\, pv_0 + \zeta v_0 - \zeta v].$$

Les arguments v et v_0 sont l'un et l'autre inférieurs à ω_1.

On aura donc finalement

$$\sigma = \frac{\pi a^2 b^2 (1-h)}{\sqrt{[c^2 h + a^2(1-h)][c^2 h + b^2(1-h)]h}} + \pi\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\, [(v_0 - v)\, pv_0 + \zeta v_0 - \zeta v].$$

Pour avoir la surface totale du demi-ellipsoïde que Legendre appelle $4S$, il faut faire $h = 0$, $v = 0$. Les deux termes infinis sont

$$\frac{\pi ab}{\sqrt{h}} - \pi\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\, \zeta v,$$

L'aire de cette ellipse aura pour expression

$$\omega = \pi\sqrt{AB} = \pi\frac{a^2b^2(1-h)}{\sqrt{[c^2h+a^2(1-h)][c^2h+b^2(1-h)]}},$$

et en différentiant on obtiendra l'équation

$$d\sigma = \frac{d\omega}{\cos\theta},$$

$$\sigma = \int_1^h \frac{d\omega}{\cos\theta} = \left(\frac{\omega}{\cos\theta}\right)_1^h - \int_1^h \frac{\omega}{\cos^2\theta}\sin\theta\, d\theta,$$

$$\sigma = \frac{\pi a^2b^2(1-h)}{\sqrt{h}\sqrt{c^2h+a^2(1-h)}\sqrt{c^2h+b^2(1-h)}}$$
$$+\pi a^2b^2\int_1^h \frac{(1-h)\,dh}{2h\sqrt{[c^2h+a^2(1-h)][c^2h+b^2(1-h)]}\,h}.$$

Le coefficient différentiel s'écrit, après multiplication par $\sqrt{a^2-c^2}\sqrt{b^2-c^2}$,

$$\frac{(1-h)\,dh}{2h\sqrt{h\left[h-\frac{a^2}{a^2-c^2}\right]\left[h-\frac{b^2}{b^2-c^2}\right]}}.$$

Posons

$$e_2 = -\frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{a^2-c^2}+\frac{b^2}{b^2-c^2}\right) = \frac{1}{3}\frac{\rho^4-3a^2b^2}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)},$$

$$\rho^4 = a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2,$$

$$e_1 = e_2+\frac{b^2}{b^2-c^2} = \frac{1}{3}\frac{\rho^4-3b^2c^2}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)},$$

$$e_3 = e_2+\frac{a^2}{a^2-c^2} = \frac{1}{3}\frac{\rho^4-3a^2c^2}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)} \qquad (e_1>e_3>e_2),$$

$$p'u = -2\sqrt{(pu-e_1)(pu-e_2)(pu-e_3)},$$

$$h = pu-e_2;$$

le coefficient différentiel devient

$$\frac{(1+e_2-pu)\,du}{pu-e_2},$$

et les limites sont pour u une valeur u_0 telle que

$$pu_0 = 1+e_2$$

et u.

dont le premier s'écrit

$$\frac{\pi ab}{\sqrt{pu - e_2}} = \frac{\pi ab}{\sqrt{p(v + \omega_2) - e_2}} = \pi\sqrt{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}\sqrt{pv - e_2}.$$

Il a donc la même valeur principale que le second terme infini et les parties infinies se détruisent; les autres termes de ζv s'annulent pour $v = 0$ et, le multiplicateur de $\frac{\pi ab}{\sqrt{h}}$ étant de la forme $1 + mh + \ldots$, le premier terme de σ disparaîtra entièrement quand on fera $h = 0$. Il reste donc

$$4S = \pi\sqrt{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}\,(v_0\, p v_0 + \zeta v_0)$$

avec

$$p v_0 = \frac{\rho^4}{3(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}.$$

Je vais, de la formule précédente, déduire celle de Legendre, donnée au début de ce paragraphe. La formule (63) donne

$$\operatorname{sn} v_0 \sqrt{e_1 - e_2} = \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{p v_0 - e_2}} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a};$$

le second membre est la quantité appelée $\sin\nu$ par Legendre. Le module s'obtient par la formule (62)

$$k^2 = \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2} = \frac{a^2(b^2 - c^2)}{b^2(a^2 - c^2)}.$$

C'est donc la quantité b' de Legendre, et l'on a

$$v_0\sqrt{e_1 - e_2} = F(b', \nu),$$

$$v_0 = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{b} F(b', \nu).$$

La deuxième formule (83) donne $\zeta(v_0)$

$$\zeta v_0 = \sqrt{e_1 - e_2}\, E(b', \nu) - e_1 v_0 - \frac{1}{2}\frac{p' v_0}{p v_0 - e_2};$$

or

$$p' v_0 = -2\sqrt{(p v_0 - e_1)(p v_0 - e_2)(p v_0 - e_3)};$$

donc

$$-\frac{1}{2}\frac{p' v_0}{p v_0 - e_2} = \cot\nu\,\frac{c}{\sqrt{b^2 - c^2}}.$$

On obtient ainsi

$$4S = \pi\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\left[\frac{b}{\sqrt{b^2-c^2}}E(b',\nu)+(p v_0-e_1)v_0+\cot\nu\frac{c}{\sqrt{b^2-c^2}}\right]$$

$$= \pi\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}$$

$$\times\left[\frac{b}{\sqrt{b^2-c^2}}E(b',\nu)+\frac{b^2c^2}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{b}F(b',\nu)+\cot\nu\frac{c}{\sqrt{b^2-c^2}}\right],$$

$$4S = \pi c^2+\pi\left[b\sqrt{a^2-c^2}E(b',\nu)+\frac{bc^2}{\sqrt{a^2-c^2}}F(b',\nu)\right].$$

L'identité de cette formule avec celle de Legendre se vérifie sans peine.

Dans le cas de l'ellipsoïde de révolution, cette formule devient

$$8S = 2\pi a^2+\frac{\pi b^2}{\sin\nu}\log\frac{1+\sin\nu}{1-\sin\nu},$$

si l'ellipsoïde est aplati ($a = b$), ou

$$8S = \frac{2\pi ab}{\sin\nu}(\nu+\sin\nu\cos\nu),$$

si l'ellipsoïde est allongé ($b = c$).

APPLICATION ALGÉBRIQUE.

VII. — RÉSOLUTION NUMÉRIQUE D'UNE ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ.

La méthode indiquée pages 79 et suivantes pour l'inversion d'une intégrale elliptique constitue une véritable méthode de résolution de l'équation du quatrième degré. Bien qu'il existe des méthodes beaucoup plus courtes, nous allons en donner une application numérique à titre d'exercice et parce que nous rencontrerons, chemin faisant, la plupart des calculs qu'on peut avoir à faire dans les applications des fonctions elliptiques.

Expliquons en deux mots la méthode : par de simples changements de variables, on peut toujours mettre un polynome Y du quatrième degré en y sous la forme $[p(u+v)-pu]^2$. La résolution de l'équation $Y = 0$ est ainsi ramenée à celle de

$$\text{(A)} \qquad p(u+v)-pu = 0,$$

qui donne immédiatement

$$u + v = -u + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2,$$

$$(\mathrm{B})\quad \begin{cases} u = -\dfrac{v}{2} + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 & (\lambda = e_1 - e_2), \\ u\sqrt{\lambda} = -\dfrac{v\sqrt{\lambda}}{2} + m_1\mathrm{K} + m_2\mathrm{K}'i. \end{cases}$$

On en déduit facilement les quatre valeurs de y en donnant à m_1 et à m_2 les valeurs 0 et 1.

Nous prendrons comme exemple l'équation

$$x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 23x - 6 = 0,$$

qui, par la substitution $x = t + \frac{1}{2}$, devient

$$t^4 - \frac{23}{2}t^2 + 12t + \frac{45}{16} = 0,$$

et il n'y aura plus qu'à poser

$$(\mathrm{C})\qquad t = \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv}$$

pour que l'équation précédente soit ramenée à l'équation (A).

On a alors, en reprenant les notations de la page 80,

$$a_2 = -\frac{1}{6}\,\frac{23}{2} = -\frac{23}{12}, \qquad a_3 = 3, \qquad a_4 = \frac{45}{16},$$

$$g_2 = a_4 + 3a_2^2 = \frac{83}{6},$$

$$g_3 = a_2a_4 - a_2^3 - a_3^2 = -\frac{3175}{432}.$$

Il s'agit maintenant de résoudre l'équation auxiliaire du troisième degré

$$4z^3 - g_2z - g_3 = 0.$$

Le discriminant Δ a pour valeur

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 = \frac{2739253}{2304};$$

il est positif, donc les trois racines sont réelles, et l'on trouve

facilement, par une méthode quelconque,

$$\begin{aligned} e_1 &= 1,49236, \\ e_2 &= -2,083333, \\ e_3 &= 0,590973. \end{aligned}$$

Calcul des périodes. — Cela posé, nous allons d'abord calculer les périodes de la fonction $p(u; e_1, e_2, e_3)$, suivant la méthode exposée au Chapitre VI. On a ainsi

$$\lambda = e_1 - e_2 = 3,575693, \qquad \log\lambda = 0,5533602,$$

$$k^2 = \sin^2\theta = \frac{2,674306}{3,575693};$$

d'où l'on tire, par un calcul ordinaire de logarithmes,

$$\theta = 59^\circ 51' 43'',5 = 59^\circ,862.$$

La Table I fait alors connaître K

$$K = 2,15286.$$

L'intégrale complète relative au module complémentaire correspond à l'angle complémentaire $30^\circ,138$ et a pour valeur

$$K' = 1,68689.$$

Calcul de v. — Il faut maintenant calculer l'argument v, donné par les formules (g) et (h) de la page 81 :

$$pv = \frac{23}{12}, \qquad p'v = 3.$$

Des deux valeurs de v comprises entre $-\omega_1$ et $+\omega_1$, données par l'équation $pv = \frac{23}{12}$, il faut prendre la négative parce que $p'v$ est positive.

La formule (63) donne

$$\operatorname{sn} v\sqrt{\lambda} = \frac{-\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\frac{23}{12} + 2,083333}} = -\sin\varphi.$$

Un calcul ordinaire donne pour φ la valeur

$$\varphi = 70^\circ 59' 32'',4.$$

Il s'agit d'en déduire $v\sqrt{\lambda}$; nous lisons dans la Table II, au croisement de la ligne qui commence par 70° et de la colonne qui commence par 55°, le nombre 1,44840. Pour obtenir la valeur de $v\sqrt{\lambda}$ qui correspond à $\theta = 59°,862$ et à $\varphi = 70°59'32''$, je vais d'abord établir une formule d'interpolation; appelons X une valeur quelconque de θ, Y une valeur quelconque de φ et Z la valeur correspondante de $v\sqrt{\lambda}$. Z sera une fonction de X et de Y représentée par une certaine surface; la méthode d'approximation par parties proportionnelles étendue à l'espace consiste à traiter cette surface comme un plan. Soient alors

u_0 la valeur de Z...	pour $X = a°$	et	$Y = b°$,
u_1 » ...	pour $X = a° + 5°$	et	$Y = b°$,
u_2 » ...	pour $X = a°$	et	$Y = b° + 1°$;

l'équation du plan, passant par les trois points particuliers dont les coordonnées viennent d'être écrites, sera

$$Z - u_0 = (u_1 - u_0)\frac{X° - a°}{5°} + (u_2 - u_0)\frac{Y° - b°}{1°};$$

d'où la règle suivante :

L'accroissement de la fonction est égal à la somme des deux accroissements que fournit, pour une variable, la méthode des parties proportionnelles lorsque, laissant θ ou φ invariable, on fait varier l'autre de ces deux quantités.

Appliquons ici cette règle; on trouve dans la Table

$$u_1 - u_0 = 0,04601, \qquad u_2 - u_0 = 0,02747,$$

et nous avons

$$X - a = 4°,862, \qquad Y - b = 0°.59'22'' = 0°,989;$$

d'où

$$Z - u_0 = 0,07192,$$
$$Z = -v\sqrt{\lambda} = 1,52032.$$

Le signe *moins* qui précède $v\sqrt{\lambda}$ a déjà été expliqué.

Calcul de $p\frac{v}{2}$. — La marche inverse nous donnera $p\frac{v}{2}$,

$$-\frac{v\sqrt{\lambda}}{2} = 0,76016.$$

On trouve dans la Table le nombre 0,75862, correspondant aux valeurs suivantes : $\theta = 55^\circ$, $\varphi_1 = 41^\circ$. La même règle d'interpolation nous donnera, pour φ_1, une valeur plus approchée; on a, dans ce cas,

$$Y - b = \frac{Z - u_0}{u_2 - u_0} - \frac{u_1 - u_0}{5(u_2 - u_0)}(X - a).$$

Mais la valeur de $Y - b$ ainsi obtenue est négative; pour éviter une correction négative, qui, d'ailleurs, serait acceptable, prenons dans la Table le nombre 0,73801, qui correspond aux valeurs suivantes : $\theta = 55^\circ$, $\varphi_1 = 40^\circ$. On a alors

$$u_1 - u_0 = 0{,}00557, \qquad u_2 - u_0 = 0{,}02061,$$
$$X - a = 4^\circ{,}862, \qquad Z - u_0 = 0{,}02215.$$

On en déduit

$$Y - b = 48'42'',$$
$$\varphi_1 = 40^\circ 48' 42'',$$
$$\log \sin \varphi_1 = \bar{1}{,}8152953,$$
$$\log\left(p\frac{v}{2} - e_2\right) = \log\lambda - 2\log\sin\varphi_1 = 0{,}9227696,$$
$$p\frac{v}{2} - e_2 = 8{,}37085,$$
$$p\frac{v}{2} = 6{,}287517.$$

Calcul de la première racine. — Dans la formule (C), remplaçons u par $-\frac{v}{2}$; elle devient

$$t_1 = -\frac{1}{2}\,\frac{p'\frac{v}{2} + p'v}{p\frac{v}{2} - pv},$$

et l'on aura

$$x_1 = t_1 + \frac{1}{2}.$$

Il n'y a plus qu'à calculer $p'\frac{v}{2}$, qui sera donné par la formule

$$p'\frac{v}{2} = 2\sqrt{\left(p\frac{v}{2} - e_1\right)\left(p\frac{v}{2} - e_2\right)\left(p\frac{v}{2} - e_3\right)},$$

3. Intégrer l'équation

$$\frac{d^2 z}{du^2} = (2pu + \gamma)z,$$

qu'on déduit de l'équation de Lamé en y faisant $n = 1$.

4. Montrer que l'équation de Lamé, dans les notations de Jacobi, peut s'écrire

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]y.$$

5. Étudier les mouvements à la Poinsot (*voir* HALPHEN, t. II, Chap. II).

Les équations du problème sont, en désignant par ω, p, q, r la rotation autour de l'axe instantané et ses composantes par rapport à trois axes rectangulaires liés invariablement au solide,

$$A\frac{\partial p}{\partial t} + (C - B)qr = 0,$$

$$B\frac{\partial q}{\partial t} + (A - C)pr = 0,$$

$$C\frac{\partial r}{\partial t} + (B - A)pq = 0,$$

avec

$$p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2;$$

A, B, C sont des constantes.

On en déduit, h et k étant des constantes,

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h,$$
$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2;$$

d'où facilement une équation de la forme

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial t} = l^2p^2q^2r^2 = -4(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2).$$

La fonction pu s'introduit d'elle-même, et l'on a

$$p = p_0\sqrt{pu - e_1},$$
$$q = q_0\sqrt{pu - e_2},$$
$$r = r_0\sqrt{pu - e_3},$$

les équations du lieu du point de contact de l'ellipsoïde central avec le

plan fixe sont, pour le lieu sur l'ellipsoïde (polhodie),

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = \frac{k^2}{h} L^2,$$

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = \frac{k^4}{h^2} L^2,$$

L étant une longueur constante; et, pour le lieu sur le plan fixe, ρ et φ étant des coordonnées polaires,

$$\rho^2 = \frac{n^2k^2}{h}(\mathrm{p}v - \mathrm{p}u),$$

$$\varphi = n\frac{h}{k}u + \frac{1}{2}i\int\frac{\mathrm{p}'v\,du}{\mathrm{p}v - \mathrm{p}u};$$

n et $\mathrm{p}v$ sont aussi des constantes fournies par la discussion.

Dans la notation de Jacobi, p, q, r sont, dans un ordre à déterminer, proportionnelles à $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$.

6. Étudier et discuter le problème du pendule sphérique avec les notations de Jacobi (Tissot, *Journal de Liouville*, 1852). On pose dans l'équation (ε)

$$z_3 - z = (z_3 - z_2)u^2,$$

et l'on trouve

$$u = \mathrm{sn}\,\lambda t, \qquad \lambda = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{z(z_3 - z_2)}{2}}.$$

7. *Exercice sur le pendule sphérique* (Greenhill, traduction de Griess, p. 374). — Dans le cas particulier où l'on a en même temps $z_0 = 0$, $\varepsilon = 0$ (v_0 horizontale), c'est-à-dire lorsque le pendule est lancé horizontalement au niveau du point de suspension, l'expression $\psi - \frac{v_0}{2l}t$ est pseudo-elliptique et, si l'on pose

$$z = l\cos\theta,$$

on a la relation

$$\sin\theta\sin\left(\psi - \frac{v_0}{2l}t\right) = \frac{v_0}{\sqrt{2gl}}\sqrt{\cos\theta};$$

dans ce cas, contrairement à ce qui se passe dans le cas général, x, y, z sont toutes les trois des fonctions doublement périodiques du temps.

8. Évaluer l'aire de l'ellipsoïde en employant, au lieu de la substitution employée dans le texte, la suivante

$$\tan^2\theta = \frac{\rho^4}{3a^2b^2}(\mathrm{p}u - 1);$$

On trouvera

$$8S = 2\pi \frac{\rho}{\sqrt{3}}(\zeta u_0 + u_0)$$

avec la condition

$$p u_0 = 1.$$

Les racines qui définissent pu sont

$$e_1 = 1 - \frac{3b^2c^2}{\rho^4}, \qquad e_3 = 1 - \frac{3a^2c^2}{\rho^4}, \qquad e_2 = 1 - \frac{3a^2b^2}{\rho^4} \qquad (e_1 > e_3 > e_2).$$

(Résultat communiqué par M. G. Humbert.)

CHAPITRE VIII.

DEUXIÈME MÉTHODE DE CALCUL : EMPLOI DES SERIES. — CALCUL DES INTÉGRALES COMPLÈTES DE q ET DES PÉRIODES. — CALCUL DES FONCTIONS ELLIPTIQUES DE ζu, DE σu, CONNAISSANT u, ET PROBLÈME INVERSE.

Calcul des intégrales elliptiques. — Le développement en série de $(1 - k^2 \sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}$ permet d'écrire

$$(a)\quad \begin{cases} F(\varphi) = \displaystyle\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \\ \qquad = \varphi + \frac{1}{2} k^2 I_2 + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} I_{2n} k^{2n} + \ldots \end{cases}$$

en posant

$$I_{2n} = \int_0^\varphi \sin^{2n}\varphi \, d\varphi,$$

et l'on sait calculer cette dernière intégrale par voie de récurrence. Si $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on a l'intégrale complète de première espèce

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = K = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \ldots + \left[\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right]^2 k^{2n} + \ldots\right\}.$$

Mais ces deux séries ne seront utilisables que si k est petit; si k est voisin de l'unité, on pourra poser

$$k^2 = 1 - k'^2.$$

Il en résultera

$$(1 - k^2 \sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = (\cos^2\varphi + k'^2 \sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\cos\varphi}\left(1 - \frac{1}{2} k'^2 \tang^2\varphi + \ldots\right)$$

et

$$(b) \qquad F(\varphi) = J_0 - \frac{1}{2} J_2 k'^2 + \ldots + (-1)^n \frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n} J_{2n} k'^{2n}$$

en posant

$$J_{2n} = \int_0^\varphi \operatorname{tang}^{2n}\varphi \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \int_0^\varphi \sin^{2n}\varphi \cos^{-2n-1}\varphi \, d\varphi.$$

Enfin, si k n'est ni très petit, ni très voisin de l'unité, on pourra, par une transformation célèbre connue sous le nom de *transformation de Landen,* remplacer l'intégrale elliptique par une autre dont le module soit plus avantageux. Notre but n'étant pas de nous étendre sur le calcul de ces intégrales, nous nous bornerons à indiquer la règle, renvoyant pour la démonstration au *Traité d'Analyse* de M. Jordan, t. II, p. 112; soient ψ un angle tel que

$$\sin(2\psi - \varphi) = k \sin\varphi$$

et k_1 un module relié à k par la formule

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k},$$

qu'on appelle l'*échelle des modules,* on aura

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \frac{2}{1+k} \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2\psi}}.$$

Le nouveau module est compris entre $\sqrt{k}$ et 1; on calculera de même un module k_2 compris entre $\sqrt{k_1}$ et 1, et l'on finira ainsi par obtenir un module assez voisin de l'unité pour pouvoir utiliser la série (b). Remarquons d'ailleurs que si $k = 1$, on a une expression qui s'intègre par les méthodes élémentaires; on trouve

$$x = \sin\varphi = \frac{1 - e^{2u}}{1 + e^{2u}}.$$

On pourrait aussi passer du module k_1 au module k et remonter l'échelle des modules en sens inverse jusqu'à obtenir un module assez petit pour pouvoir employer la série (a). Je n'insisterai pas sur ce sujet, qui présente surtout un intérêt historique.

Remarque. — Si $k = 0$, on trouve immédiatement

$$x = \sin\varphi = \sin u.$$

Calcul des constantes et des fonctions de Weierstrass (discriminant positif).

Calcul de q. — Dans le cas où les trois racines sont réelles, il existe une période réelle ω_1 et une période imaginaire ω_2, et les fonctions θ constituées avec ces périodes sont bien celles d'où l'on a déduit la fonction pu aux racines e_1, e_2, e_3. Nous allons d'abord calculer la quantité q

$$q = e^{\frac{\pi i \omega_2}{\omega_1}}.$$

Cette quantité est réelle et plus petite que l'unité, pourvu que $\frac{i\omega_2}{\omega_1}$ soit négatif et cette dernière condition peut toujours être remplie par un choix convenable des signes des périodes. Je vais même montrer qu'il existe toujours, sauf à intervertir les deux périodes que nous avons adoptées, une valeur de q inférieure à $\frac{1}{9}$. On sait en effet (48) que

$$\omega_1 = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_2}}.$$

Or, en appliquant le théorème de la moyenne

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} < \mu \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$K < \mu \frac{\pi}{2},$$

μ est le maximum de $\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{1}{k'},$$

donc

$$\omega_1 < \frac{1}{k'}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{e_1 - e_2}}.$$

De même

$$\omega_2 = \frac{iK'}{\sqrt{e_1 - e_2}}$$

et

$$K' > m \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$K' > m\frac{\pi}{2},$$

m étant le minimum de $\frac{1}{\sqrt{1-k'^2x^2}}$, c'est-à-dire 1.

On tire de là

$$\frac{\pi\omega_2 i}{\omega_1} = -\frac{\pi K'}{K},$$

$$e^{\frac{\pi\omega_2 i}{\omega_1}} = \frac{1}{e^{\pi\frac{K'}{K}}} < \frac{1}{e^{\pi k'}}.$$

Or, des deux modules k et k', l'un des deux est toujours supérieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, et nous allons préciser dans quelles circonstances ce fait se produira; concluons d'abord que, dans ce cas, on aura

$$q < \frac{1}{e^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}} < \frac{1}{9}.$$

Revenons à la recherche des conditions pour que k' soit supérieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ou, ce qui revient au même, supérieur à k. Il faudra avoir, formules (62),

$$\frac{e_1 - e_3}{e_1 - e_2} > \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2},$$

et, comme $e_1 - e_2$ est positif,

$$2e_3 < e_1 + e_2,$$

$$e_3 < \frac{e_1 + e_2}{2};$$

la racine intermédiaire e_3 devra donc être plus voisine de la racine négative e_2 que de la racine positive supérieure e_1. S'il n'en était pas ainsi, on considérerait, pour un instant, la fonction

$$p_1(v; -e_1, -e_2, -e_3),$$

dont le module complémentaire est k, qui remplirait les condi-

tions voulues (*voir* p. 60) et dont le lien avec pu est si simple; appelons alors pour un instant $2\omega'_1$ la période réelle, $2\omega'_2$ la période purement imaginaire de cette fonction, la quantité

$$q = e^{\pi i \frac{\omega'_2}{\omega'_1}}$$

sera réelle et inférieure à $\frac{1}{9}$. Mais on sait [formule (λ), Chap. IV] que l'on peut prendre

$$\omega'_2 = -i\omega_1, \qquad \omega'_1 = +i\omega_2;$$

le rapport précédent aura donc pour expression $e^{-\pi i \frac{\omega_1}{\omega_2}}$ (¹) et l'on voit que parmi les périodes constitutives des fonctions θ et p il en existera bien encore deux, l'une réelle, l'autre purement imaginaire d'où découle une quantité q inférieure à $\frac{1}{9}$; seulement la période réelle figurera au numérateur de l'exposant au lieu de figurer au dénominateur et la fonction constitutive θ sera différente de celle employée dans le premier cas.

Cela posé, une des deux formules (m) du Chapitre II, combinée avec (12) et (13), permettra immédiatement d'obtenir q [cette formule (m) peut facilement être déduite des formules (62), (58) et (17)]

$$\sqrt[4]{\frac{e_1 - e_3}{e_1 - e_2}} = \sqrt{k'} = \frac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)} = \frac{1 - 2q + 2q^4 + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + \ldots}.$$

D'après ce qui précède on n'a plus nécessairement ici

$$e_1 > e_3 > e_2;$$

mais e_3 est toujours la racine intermédiaire, e_2 est la racine la plus voisine de e_3.

A la vérité le signe du radical serait ambigu, mais comme q est petit, le second membre est certainement positif, et il faut prendre

---

(¹) L'inégalité $e^{\pi \frac{K'}{K}} < 9$, entraîne $\frac{K'}{K} < 1$; il est donc clair que $\frac{K}{K'}$ est plus grand que 1 et, par suite, $e^{\pi \frac{K}{K'}} > 9$. Il n'y a donc bien qu'à renverser les périodes pour obtenir une valeur de q inférieure à $\frac{1}{9}$.

le signe $+$. Nous pourrons même, puisque nous cherchons la racine de cette équation qui est inférieure à $\frac{1}{9}$, négliger dans la fraction tous les termes qui sont à des puissances supérieures à la première et l'équation se réduira à

$$\frac{1-2q}{1+2q} = \sqrt{k'},$$

d'où

$$q = \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}.$$

Calcul des périodes $\omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2$. — A partir d'ici il va falloir distinguer deux sous-cas :

1° $k' > k \left(e_3 < \frac{e_1+e_2}{2}\right)$. — La valeur de q, donnée par l'équation précédente, correspond à la valeur $e^{\frac{\pi i \omega_2}{\omega_1}}$. La formule (45) donne alors

$$2\omega_1 = \pm\pi\frac{\theta_3^2(0)}{\sqrt{e_1-e_2}} = \pm\pi\frac{(1+2q+2q^4+2q^9+\ldots)^2}{\sqrt{e_1-e_2}} = \frac{2K}{\sqrt{e_1-e_2}},$$

et, puisque q est connu, on a immédiatement

$$\frac{\pi i \omega_2}{\omega_1} = \mathrm{L}q,$$

$$\omega_2 = -i\frac{\omega_1}{\pi}\mathrm{L}q,$$

le signe L désignant un logarithme népérien. A la vérité le logarithme ayant une infinité de déterminations, cette équation donne pour ω_2 une infinité de valeurs; mais une seule est purement imaginaire, c'est celle qui correspond à la valeur réelle $\mathrm{L}q$. On trouvera à la fin du Volume une Table des valeurs de logarithme ordinaire de q.

La formule (23) donne η_1

$$\eta_1 = -\frac{\omega_1}{3}\frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)},$$

et la formule (25) η_2

$$\eta_2 = -\frac{1}{\omega_1}\left(\eta_1\omega_2 - \frac{\pi i}{2}\right).$$

2° $k' < k$. — Dans ce cas la fonction θ est constituée avec les

constantes $q = e^{-\pi i \frac{\omega_1}{\omega_2}}$ et $-\omega_2$. Mais alors les hypothèses faites page 54 ne subsistent plus; au contraire, comme ω_2 est purement imaginaire, et prend la place de ω_1, on aura, par suite des formules (s') du Chapitre IV,

$$e_1 < e_3 < e_2.$$

Les indices 1 et 2 se trouvent donc échangés tant pour les périodes que pour les racines et la formule (45) fait maintenant connaître la période imaginaire

$$2\omega_2 = \pm \pi \frac{\theta_3^2(0)}{\sqrt{e_1 - e_2}} = \pi i \frac{1 + 2q - 2q^4 + \ldots}{\sqrt{e_2 - e_1}}.$$

La formule $q = e^{-\pi i \frac{\omega_1}{\omega_2}}$ donne ω_1,

$$\omega_1 = i \frac{\omega_2}{\pi} \log q,$$

les formules (23) et (25), η_1 et η_2

$$\eta_2 = -\frac{\omega_2}{3} \frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)},$$

$$\eta_1 = \frac{1}{\omega_2}\left(\eta_2 \omega_1 + \frac{\pi i}{2}\right).$$

Calcul de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$. — Les formules (46) donnent les valeurs des fonctions de Jacobi pour chaque valeur de u. Les fonctions θ seront toujours remplacées par leurs développements (10, 11, 12 et 13) en série trigonométrique, et dans ces développements il suffira toujours de considérer un, ou au plus deux termes en q.

Calcul de σu, ζu, pu. — C'est encore la définition qui suffira pour σu

$$\sigma u = e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1} u^2} \frac{\theta u}{\theta'(0)}.$$

Pour avoir ζu, on recourra à la formule (34), qui d'ailleurs se déduit de la précédente par dérivation logarithmique

$$\zeta u = \frac{\eta_1}{\omega_1} u + \frac{\theta' u}{\theta u}.$$

La formule (58) fournit la valeur de pu

$$pu = e_\alpha + \left(\frac{\theta_\alpha u}{\theta u}\,\frac{\theta' o}{\theta_\alpha o}\right)^2,$$

et l'on choisira pour α la valeur 1, 2 ou 3 qui semblera plus commode pour le calcul.

Remarque. — Dans le cas où u est très petit, il est possible d'obtenir les valeurs des fonctions de Weierstrass en fonction des invariants par des formules directes. Nous avons vu, en effet (43), que

$$pu = \frac{1}{u^2} + c_2 u^2 + c_4 u^4 + \ldots,$$

d'où

$$p'u = -\frac{2}{u^3} + 2c_2 u + 4c_4 u^3 + \ldots.$$

Or

$$p'^2 u = 4p^3 u - g_2 pu - g_3;$$

on a donc, en égalant les termes en $\frac{1}{u_2}$ et constant,

$$c_2 = \frac{g_2}{20}, \qquad c_3 = \frac{g_3}{28},$$

et les autres coefficients c_6, c_8, ... s'obtiendront à l'aide de l'identité

$$p''u = 6p^2 u - \frac{1}{2} g_2,$$

qui fournira une relation entre deux coefficients successifs. On trouve ainsi

$$pu = \frac{1}{u_2} + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \frac{g_2^2}{2^4.3.5^2} u^6 + \frac{3 g_2 g_3}{2^4.5.7.11} u^8 + \ldots.$$

En intégrant on aura successivement ζu et σu

$$\zeta u = \frac{1}{u} - \frac{c_2}{3} u^3 - \frac{c_4}{5} u^5 + \ldots,$$

$$\zeta u = \frac{1}{u} - \frac{g_2}{2^2.3.5} u^3 - \frac{g_3}{2^2.5.7} u^5 - \frac{g_2^2}{2^4.3.5^2.7} u^7 - \frac{g_2 g_3}{2^4.3.5.7.11} u^9 - \ldots,$$

$$\sigma u = u e^{-\left(\frac{c_2}{12} u^4 + \frac{c_4}{30} u^6 + \ldots\right)} = u(1 + d_1 u^4 + d_2 u^6 + d_3 u^8 + \ldots),$$

$$\sigma u = u - \frac{g_2}{2^4.3.5} u^5 - \frac{g_5}{2^9.3.5.7} u^7 - \frac{g_2^2}{2^9.3^2.5.7} u^9 - \frac{g_2 g_3}{2^7.3^2.5^2.11} u^{11} + \ldots.$$

Les constantes qu'auraient pu introduire ces deux intégrations successives sont déterminées par la condition que $\zeta u - \frac{1}{u}$ s'annule pour $u = 0$ et que la valeur principale de σu soit u pour u infiniment petit.

Deuxième remarque. — Dans les mêmes conditions, c'est-à-dire pour u très petit, on peut obtenir le développement des fonctions de Jacobi en fonction du module k^2. L'équation d'où nous partirons est l'équation (64)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2),$$

dans laquelle il suffit de remplacer x par un développement de la forme

$$u + c_1 \frac{u^3}{1.2.3} + c_2 \frac{u^5}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

pour obtenir les valeurs de $c_1, c_2, \ldots$. On trouvera ainsi

$$\begin{aligned}
c_1 &= 1 + k^2,\\
c_2 &= 1 + 14k^2 + k^4,\\
c_3 &= 1 + 135k^2(1 + k^2 + k^6,\\
c_4 &= 1 + 5478k^4 + 1228k^2(1 + k^4) + k^8,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

De même si l'on pose

$$\operatorname{cn} u = 1 - d_1 \frac{u^2}{1.2} + d_2 \frac{u^4}{1.2.3.4},$$

$$\operatorname{dn} u = 1 - f_1 \frac{u^2}{1.2} + f_2 \frac{u^4}{1.2.3.4},$$

on aura

$$\begin{aligned}
d_1 &= 1,\\
d_2 &= 1 + (2k)^2,\\
d_3 &= 1 + 11(2k)^2 + (2k)^4,\\
d_4 &= 1 + 102(2k)^2 + 57(2k)^4 + (2k)^6,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1 &= k^2,\\
f_2 &= k^2(k^2 + 2^2),\\
f_3 &= k^2(k^4 + 11.2^2k^2 + 2^4),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On peut remarquer que, si l'on néglige les puissances de u supérieures à la troisième, $\operatorname{sn} u$ est égal à $\frac{\sin(u\sqrt{1+k^2})}{\sqrt{1+k^2}}$, $\operatorname{cn} u$ à $\cos u$, $\operatorname{dn} u$ à $\cos ku$.

Problème inverse. — *Connaissant pu, calculer u.*

Il s'agit de résoudre l'équation

$$px = a.$$

De la formule (58) on déduit

$$\frac{\sqrt{pu-e_2}}{\sqrt{pu-e_3}} = \frac{\theta_2 u}{\theta_3 u}\frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)};$$

d'où

$$(c) \qquad \frac{\theta_2(x)}{\theta_3(x)} = \frac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)}\sqrt{\frac{a-e_2}{a-e_3}} = \pm A.$$

Je suppose d'abord a réel et plus grand que les trois racines. Nous savons alors qu'il y aura une infinité de valeurs réelles de x satisfaisant à la question (*fig.* 1), et si, pour préciser, j'appelle x_0 la valeur comprise entre 0 et ω_1, toutes les autres seront données par la formule

$$(d) \qquad x = \pm x_0 + 2m_1\omega_1;$$

il suffirait d'ajouter $2m_2\omega_2$ pour avoir toutes les valeurs imaginaires. Cela posé, dans l'équation (c), remplaçons $\theta_2(x)$ et $\theta_3(x)$ par leurs valeurs tirées des équations (12) et (13)

$$(e) \qquad \frac{1 - 2q\cos\frac{\pi x}{\omega_1} + 2q^4\cos\frac{2\pi x}{\omega_1} - 2q^9\cos\frac{3\pi x}{\omega_1} + \ldots}{1 + 2q\cos\frac{\pi x}{\omega_1} + 2q^4\cos\frac{2\pi x}{\omega_1} + 2q^9\cos\frac{3\pi x}{\omega_1} + \ldots} = \pm A.$$

Si le module est inférieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, q sera inférieur à $\frac{1}{9}$ et $2q^4\cos\frac{2\pi x}{\omega_1}$ à $2\frac{1}{9^4}$; l'équation précédente peut donc être réduite à la suivante, où l'on a supprimé le signe —, évidemment inadmissible,

$$\frac{1 - 2q\cos\frac{\pi x}{\omega_1}}{1 + 2q\cos\frac{\pi x}{\omega_1}} = A,$$

d'où l'on tire

$$(f) \qquad \cos\frac{\pi x}{\omega_1} = \frac{1}{2q}\,\frac{1-A}{1+A};$$

cette équation donne bien toutes les valeurs fournies par la formule (d).

Nous avons supposé le module k inférieur à k'; dans le cas contraire, puisque ω_2 joue maintenant, dans la définition des θ, le rôle de ω_1, la formule (c) s'écrit

$$\frac{1-q\left(e^{\frac{\pi i x}{\omega_2}}+e^{-\frac{\pi i x}{\omega_2}}\right)+q^4\left(e^{\frac{2\pi x i}{\omega_2}}+e^{-\frac{2\pi i x}{\omega_2}}\right)+\ldots}{1+q\left(e^{\frac{\pi i x}{\omega_2}}+e^{-\frac{\pi i x}{\omega_2}}\right)+q^4\left(e^{\frac{2\pi i x}{\omega_2}}+e^{-\frac{2\pi i x}{\omega_2}}\right)+\ldots}=A$$

avec

$$q = e^{-\pi i\frac{\omega_1}{\omega_2}}.$$

Or on sait que l'équation $px = a$ admet une racine et une seule, comprise entre zéro et ω_1; pour cette racine x, on aura, comme $\frac{\omega_2}{i}$ est positif,

$$\frac{2\pi i x}{\omega_2} < \frac{2\pi i\omega_1}{\omega_2},$$

$$q^2 < e^{-\frac{2\pi i x}{\omega_2}} < 1,$$

$$1 < e^{2\pi i\frac{x}{\omega_2}} < \frac{1}{q^2};$$

donc le troisième terme de l'équation précédente est inférieur à $q^4\left(1+\frac{1}{q^2}\right)$, et, par suite, avec une approximation égale à $\frac{1}{81}$ environ, on pourra réduire l'équation à

$$\frac{1-q\left(e^{\frac{\pi i x}{\omega_2}}+e^{-\frac{\pi i x}{\omega_2}}\right)}{1+q\left(e^{\frac{\pi i x}{\omega_2}}+e^{-\frac{\pi i x}{\omega_2}}\right)}=A,$$

ou

$$e^{\frac{\pi i x}{\omega_2}}+e^{-\frac{\pi i x}{\omega_2}} = \frac{1}{2q}\,\frac{1-A}{1+A}.$$

Cette équation fera connaître deux valeurs inverses l'une de l'autre pour $e^{\frac{\pi i x}{\omega_2}}$; il leur correspondra deux valeurs réelles pour x

deux à deux égales et de signes contraires qui conviendront l'une à l'autre. Si, par exemple, on a

$$e^{\frac{\pi i x}{\omega_2}} = \alpha,$$

on trouvera

$$x = \pm \frac{\omega_2}{\pi i} \mathrm{L}\alpha = \pm x_0.$$

Supposons maintenant a compris entre les deux plus petites racines e_2 et e_3 $(e_3 > e_2)$; on sait que ω_2 désignant la période imaginaire, il existe pour x des solutions de la forme $\omega_2 + y$. La formule (59) permettra d'obtenir y par la méthode précédente, car on aura

$$\begin{aligned} \wp y &= e_2 + \frac{(e_1 - e_2)(e_3 - e_2)}{\wp(\omega_2 + y) - e_2} \\ &= e_2 + \frac{(e_1 - e_2)(e_3 - e_2)}{a - e_2} = b. \end{aligned}$$

Si a est inférieur à la plus petite racine ou compris entre les deux plus grandes, on posera $x = iy$ et l'on déterminera y par l'équation

$$\wp(y\,; -e_1, -e_2, -e_3) = -a,$$

par application de la formule (67); $-a$ sera supérieur à la plus grande racine ou compris entre les deux plus petites. La méthode précédente s'appliquera donc.

Calcul des constantes et des fonctions de Weierstrass (discriminant négatif).

Nous avons rencontré, si les racines de $4z^3 - g_2 z - g_3 = 0$ ne sont pas réelles toutes les trois, une difficulté qui tient à ce que les périodes réelle et purement imaginaire ne peuvent plus servir à constituer une fonction θ d'où l'on déduirait la fonction $\wp u$ définie par l'équation

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = 4z^3 - g_2^2 - g_3.$$

Nous avons vu, page 93, que, dans ce cas, les périodes fonda-

mentales à choisir étaient les quantités définies par les formules

$$\omega' = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2},$$

$$\omega'' = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}.$$

Ce sont les constantes constitutives de θ, et l'on aura

$$q = e^{\pi i \frac{\omega'}{\omega''}}.$$

Si donc on calculait q par les méthodes indiquées dans le cas des racines réelles, c'est cette valeur que nous obtiendrions ; elle est imaginaire, ainsi que ω' et ω''. Nous allons parvenir aux valeurs de ω_1 et ω_2 par des séries réelles, en procédant comme dans le Chapitre VI. On vérifie aisément (*voir* exercice 1, Chap. VI) que, si l'on pose, en conservant les notations de la page 90,

$$y_2 = 3e_1 + 2\mathrm{H}, \qquad y_3 = 3e_1 - 2\mathrm{H},$$

$$e'_1 = \frac{2y_2 - y_3}{3}, \qquad e'_2 = \frac{2y_3 - y_2}{3}, \qquad e'_3 = -\frac{y_2 + y_3}{3} \qquad (e'_1 > e'_3 > e'_2),$$

$$k_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{3e_1}{4\mathrm{H}}, \qquad k_1'^2 = \frac{1}{2} + \frac{3e_1}{4\mathrm{H}},$$

et enfin

$$y = \bar{\wp}(u\,;\, e'_1,\, e'_2,\, e'_3) - e'_3,$$

la fonction $\bar{\wp} u$ aura pour périodes réelle et purement imaginaire les moitiés des périodes réelle et purement imaginaire de $\wp u$. En d'autres termes, si l'on appelle $2\omega'_1$ et $2\omega'_2$ les périodes de $\bar{\wp} u$, on aura les relations suivantes, où nous avons fait figurer à nouveau les périodes primitives de $\wp u$,

$$2\omega'_1 = \omega_1 = \omega' + \omega'',$$

$$2\omega'_2 = \omega_2 = -\omega' + \omega'',$$

$$(g) \qquad \bar{\wp} u = e_1 + 2\mathrm{H} + \frac{(\wp u - e_1 - \mathrm{H})^2}{\wp u - e_1} = \wp u + \frac{\mathrm{H}^2}{\wp u - e_1} \quad (^1).$$

---

(1) Les relations entre les périodes peuvent s'écrire :

$$2\omega' = 2\omega'_1 + 2\omega'_2,$$

$$2\omega'' = -2\omega'_1 + 2\omega'_2,$$

et l'on a ici un exemple du problème de la transformation, qui consiste à chercher des relations entre des fonctions $\wp u$ à périodes déduites les unes des autres par des substitutions linéaires : la transformation ici est du deuxième ordre, parce que le déterminant de la substitution a pour valeur 2.

Les périodes $2\omega'_1$ et $2\omega'_2$ étant évidemment primitives pour $\overline{p}u$, les méthodes données dans le cas des racines réelles subsistent. Ainsi posons

$$q' = e^{\pi i \frac{\omega'_2}{\omega'_1}} = e^{\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}},$$

et, pour fixer les idées, supposons

$$k_1^2 < \frac{1}{2} \qquad (e_1 > 0),$$

on aura

$$q' = \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{k'_1}}{1+\sqrt{k'_1}},$$

$$2\omega'_1 = \omega_1 = \pm\pi\frac{\theta_3^2(0)}{\sqrt{e'_1 - e'_2}} + \pm\pi\frac{(1+2q+2q^4+\ldots)^2}{2\sqrt{H}},$$

les fonctions θ étant constituées avec les périodes $2\omega'_1$ et $2\omega'_2$,

$$\omega_2 = -i\frac{\omega_1}{\pi}\,\mathrm{L}q'.$$

Pour avoir les constantes η_1 et η_2, je vais chercher leurs relations avec les constantes η'_1, η'_2 relatives à la fonction $\overline{p}u$, constantes données à la page 168,

$$\eta'_1 = -\frac{\omega'_1}{3}\,\frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)},$$

$$\eta'_2 = -\frac{1}{\omega'_1}\left(\eta'_1\omega'_2 - \frac{\pi i}{2}\right).$$

Intégrons la relation (g) et déterminons la constante de manière à n'avoir pas de terme constant dans le second membre ; il vient, en se rappelant que (59)

$$\frac{H^2}{pu - e_1} = p(u+\omega_1) - e_1 = p(u-\omega_1) - e_1,$$

$$(h) \qquad \overline{\zeta}u = \zeta u + \zeta(u-\omega_1) + e_1 u + \eta_1.$$

La fonction $\overline{\zeta}u$ correspond aux périodes $2\omega'_1$ et $2\omega'_2$; elle prend donc la valeur η'_1 pour $u = \omega'_1 = \frac{\omega_1}{2}$. On a ainsi

$$\eta'_1 = \frac{1}{2}e_1\omega_1 + \eta_1,$$

et cette formule fera connaître η_1. On aura enfin η_2 par l'équation

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \pi i,$$

que l'on déduit facilement de la formule (25)

$$\eta_1'\omega'' - \eta_1''\omega' = \frac{\pi i}{2}.$$

Le lecteur verra sans peine ce qu'il y a à faire dans le cas où k_1^2 est supérieur à $\frac{1}{2}$.

Calcul de pu, ζu, σu, *connaissant* u.

1° pu. — On commence par calculer $\overline{p}u$; à cet effet, puisque les racines de $\overline{p}u$ sont réelles, il suffira d'appliquer la formule (58)

$$\overline{p}u = e'_\alpha + \left(\frac{\theta_\alpha u}{\theta u}\,\frac{\theta' o}{\theta_\alpha o}\right)^2,$$

les fonctions θ correspondant aux périodes $2\omega'_1 = \omega_1$ et $2\omega'_2 = \omega_2$. Il ne reste plus qu'à utiliser l'équation (g); cette équation donnera pour pu deux valeurs. Il est évident qu'une seule conviendra; dans chaque problème particulier, il sera facile de distinguer la solution à employer; par exemple, si u est réelle, une des valeurs données par l'équation sera supérieure à $e_1 + H$ et l'autre inférieure, tout en restant plus grande que e_1.

2° ζu. — Ayant calculé $\overline{\zeta}u$, comme il a été indiqué dans le cas des racines réelles, la formule (h) fera connaître ζu; en effet, en se servant de l'équation (40), où l'on fera $v = -\omega_1$, elle devient

$$\overline{\zeta}u = 2\zeta u + e_1 u + \frac{1}{2}\,\frac{p'u}{pu - e_1} = 2\zeta u + e_1 u + \sqrt{\frac{(pu - m)^2 + n^2}{pu - e_1}},$$

et, dans cette formule, tout est connu sauf ζu.

3° σu. — Pour calculer σu, nous allons la rattacher à la fonction $\overline{\sigma}u$, qui correspond aux périodes $2\omega'_1$ et $2\omega'_2$; il suffit pour cela d'intégrer l'équation (h) de manière que les deux membres aient

la même valeur principale pour u infiniment petit

$$\log\bar{\sigma}u = \log\sigma u + \log\sigma(u-\omega_1) + \frac{e_1 u^2}{2} + \eta_1 u - \log\sigma(-\omega_1);$$

d'où l'on tire

$$\bar{\sigma}u = -\frac{\sigma u\,\sigma(u-\omega_1)}{\sigma\omega_1}\,e^{\eta_1 u + \frac{e_1 u^2}{2}};$$

or l'équation (58) donne

$$\frac{\sigma(u-\omega_1)}{\sigma\omega_1}\,e^{\eta_1 u} = \pm\,\sigma u\sqrt{\wp u - e_1}.$$

On aura donc, le signe du radical restant à fixer par la connaissance du signe de u,

$$\bar{\sigma}u = \sigma^2 u\sqrt{\wp u - e_1}\,e^{\frac{e_1 u^2}{2}}.$$

Le discriminant de $\bar{\sigma}u$ est positif; on sait donc calculer le premier membre (p. 169). On connaîtra par suite σu, tout étant connu dans le second membre, sauf cette fonction.

Problème inverse. — *Résoudre l'équation* $\wp x = a$.

La formule (g) donne la solution immédiate; on est, en effet, ramené à l'équation

$$\bar{\wp}x = a + \frac{H^2}{a-e_1} = b,$$

et ce problème a été traité dans le cas du discriminant positif.

Remarque. — Dans tout ce qui précède, nous avons supposé q et $\wp u$ toujours réelles, comme cela arrive dans les applications. Le lecteur trouvera dans le *Cours d'Analyse* de M. Jordan (t. II), la démonstration de ce fait qu'il y a toujours une valeur de q dont le module soit inférieur à $\frac{1}{9}$ et une valeur de $z = e^{\pi i \frac{x}{\omega_1}}$ pour laquelle on aura

$$|q^4|\left|z^2 + \frac{1}{z^2}\right|^2 < |q|^6 + |q|^2.$$

Sous le bénéfice de ces observations, la méthode indiquée page 172 subsiste tout entière, et l'on obtiendra x par la for-

mule (f) dans laquelle il faut entendre que le cosinus peut être imaginaire et remplacé par sa valeur en fonction d'exponentielles. De même le signe de A dans le second membre n'est plus déterminé et ne sera choisi qu'*a posteriori* et par la condition que la valeur trouvée pour $e^{\frac{\pi i x}{\omega_1}}$ satisfasse bien à l'inégalité, admise par hypothèse,

$$|z^{\frac{1}{2}}| + \left|\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}}\right| < |q| + \frac{1}{q}.$$

(*Application numérique.* — *Voir* la Note IV.)

Exercices sur le Chapitre VIII.

1. Soit la série des modules donnés par l'échelle de Landen,

$$k = \sin\theta, \qquad k_1 = \sin\theta_1, \qquad \ldots, \qquad k_p = \sin\theta_p, \qquad \ldots:$$

les angles θ_p et θ_{p-1} sont reliés par la formule

$$\operatorname{tang}^2\frac{\theta_{p-1}}{2} = \sin\theta_p;$$

k_n tend vers zéro lorsque n croît à l'infini.

Démontrer la formule

$$\frac{\pi}{2K} = \cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta_1}{2}\cos^2\frac{\theta_2}{2}\ldots.$$

Application : $\theta = 45°$; on trouve $K = 1,8540747$.

2. Aux notations de l'exercice précédent joignons les suivantes : soient $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ des angles tels que

$$\operatorname{tang}(\varphi_p - \varphi_{p-1}) = k'_{p-1}\operatorname{tang}\varphi_{p-1};$$

le module complémentaire k'_n tendant vers *un* lorsque n croît à l'infini, démontrer que $\frac{\varphi_n}{2^n}$ a une limite et que

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \frac{2K}{\pi}\lim\frac{\varphi_n}{2^n}.$$

Ces deux exercices sont empruntés aux *Principes de la théorie des fonctions elliptiques* de MM. APPELL et LACOUR, Chap. X.

3. Établir la formule suivante, dans laquelle $\alpha = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right)$,

$$\operatorname{sn} u = u - 2k\alpha\frac{u^3}{3!} + (2k)^2(\alpha^2 + 3)\frac{u^5}{5!} - (2k)^4(\alpha^3 + 33\alpha)\frac{u^7}{7!} + \ldots.$$

En général, montrer que c_n, d_n, f_n désignant, comme dans le texte, les coefficients du terme général du développement de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, on a

$$c_n(k) = k^{2n} c_n\left(\frac{1}{k}\right),$$

$$f_n(k) = k^{2n} d_n\left(\frac{1}{k}\right).$$

Enfin c_n est une fonction de α multipliée par k^{2n}.

Pour démontrer ces théorèmes, on s'appuiera sur les identités faciles à établir

$$\operatorname{sn}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = k \operatorname{sn}(u, k),$$

$$\operatorname{cn}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \operatorname{dn}(u, k).$$

Pour le dernier théorème, on fera les deux substitutions simultanées

$$\operatorname{sn} u = \frac{x}{\sqrt{2k}}, \qquad u = \frac{u}{\sqrt{2k}},$$

qui transforment l'équation différentielle de $\operatorname{sn} u$ en

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 1 - \alpha x^2 + \frac{1}{4}x^4,$$

et l'on comparera le développement fourni par cette équation au premier développement obtenu.

4. Appliquer les méthodes du Chapitre VIII au calcul des racines de l'équation résolue dans le Chapitre VII

$$x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 23x - 6 = 0.$$

5. Résoudre l'équation

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = 0,$$

à l'aide des Tables de fonctions elliptiques.

6. Établir les formules

$$\frac{\eta_1}{\omega_1} + e_2 = -2\frac{\pi^2}{\omega_2}\sum\frac{q^n}{(1-q^n)^2}, \qquad q = e^{\pi i\frac{\omega_2}{\omega_1}},$$

$$\frac{\eta_2}{\omega_2} + e_1 = -2\frac{\pi^2}{\omega_2}\sum\frac{p^n}{(1-p^n)^2}, \qquad p = e^{-\pi i\frac{\omega_1}{\omega_2}},$$

$$n = 1, 3, 5, \ldots.$$

$F(z)$ n'ayant que des pôles dans la même région; on aura

$$\frac{1}{2\pi i}\int \varphi(z) D \log F(z) dz = \Sigma \mu \varphi \alpha - \Sigma \nu \varphi(\beta),$$

en désignant par α un zéro d'ordre μ, et par β un pôle d'ordre ν.

En particulier, soit $\varphi(z) = 1$, on a

$$(a) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int D \log F(z) dz = M - N;$$

M nombre des zéros, N nombre des pôles. Soit $\varphi(z) = z$,

$$(b) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int z D \log F(z) dz = S - T,$$

S somme des zéros, T somme des pôles. Dans ces deux derniers théorèmes, les zéros et les pôles doivent être comptés chacun autant de fois que le comporte leur degré de multiplicité.

Voici maintenant l'application de ces théorèmes aux fonctions θ et aux fonctions elliptiques :

Première application. — Dans la formule (a) prenons pour $F(z)$ la fonction $\theta(z)$ et pour contour d'intégration un parallélogramme, dit *parallélogramme des périodes* [1], ayant pour sommets les points z_0, $z_0 + 2\omega_1$, $z_0 + 2\omega_2$, $z_0 + 2\omega_1 + 2\omega_2$. On trouve *un* pour valeur du premier membre de l'équation (a) en appliquant les formules (15) et (16); la fonction θ n'a pas de pôles, donc

$$M = 1.$$

Ainsi, *dans un parallélogramme de périodes, la fonction θ n'a qu'une racine;* par exemple, dans un parallélogramme renfermant l'origine, il n'y a pas d'autres racines que $z = 0$, et comme on peut couvrir tout le plan avec de pareils parallélogrammes, en prenant comme sommets tous les points d'affixes

$$z_0 = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2,$$

---

[1] Nous prendrons toujours dans ce qui suit un parallélogramme élémentaire, c'est-à-dire qui ne puisse pas être remplacé par un parallélogramme de périodes à aire plus petite.

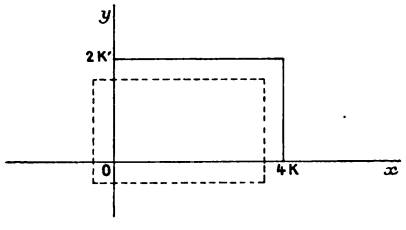
tous les zéros de $\theta(z)$ sont donnés par la formule [1]

$$z = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2.$$

Deuxième application. — Dans la formule (a) prenons pour $F(z)$ une fonction elliptique aux périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$, et pour contour d'intégration un parallélogramme de périodes. Le premier membre est nul; donc, pour toute fonction elliptique, *le nombre des pôles dans un parallélogramme de périodes est égal au nombre des zéros.* Ce nombre s'appelle l'*ordre* de la fonction. *La somme des résidus relatifs aux pôles situés dans le parallélogramme est nulle :* cela résulte du théorème II.

Ainsi, pu a un pôle double à l'origine, donc deux zéros dans un parallélogramme de périodes; $p'u$ a un pôle triple [2] à l'origine, donc trois zéros dans un parallélogramme de périodes (p. 40); $\operatorname{sn} u$, qui a pour périodes $4K$ et $2iK'$, a, dans un parallélogramme

Fig. 20.



très voisin du parallélogramme dont un sommet est à l'origine, deux zéros o, $2K$, et deux pôles iK', $iK' + 2K$; enfin $\operatorname{cn} u$, qui a pour périodes $4K$ et $2K + 2iK'$, a, dans un parallélogramme analogue, pour zéros, K et $3K$, pour pôles, iK' et $iK' + 2K$ (*fig.* 20).

Troisième application. — Dans la formule (b), supposons de même $F(z)$ doublement périodique et prenons encore pour con-

---

[1] *Comparez* formules (5) et (i), Chapitre II.

[2] Dans le voisinage de l'origine on a

$$pu = \frac{1}{u^2} + \text{série entière},$$

$$p'u = -\frac{2}{u^3} + \text{série entière}.$$

tour d'intégration un parallélogramme de périodes ABCD (*fig.* 21). Le premier membre de (b) pourra s'écrire

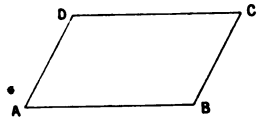
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{AB}[z\,\mathrm{D}\log\mathrm{F}(z)-(z+2\omega_2)\mathrm{D}\log\mathrm{F}(z+2\omega_2)]\,dz=-\frac{2\omega_2}{2\pi i}[\log\mathrm{F}(z)]_A^B;$$

or l'égalité, déduite des formules d'Euler (p. 3),

$$e^{x+2k\pi i}=e^x=y,$$

nous montre qu'un nombre y a une infinité de logarithmes

Fig. 21.



$x+2k\pi i$ et par suite que, $\mathrm{F}(z)$ reprenant la même valeur en A et B,

$$[\log\mathrm{F}(z)]_A^B=2k\pi i.$$

Donc le premier membre de (b) prend la valeur $-2k\omega_2$, c'est-à-dire une période, et l'on a ce théorème :

Pour toute fonction elliptique la somme des pôles dans un parallélogramme surpasse la somme des zéros d'une période.

Quatrième application : décomposition en facteurs; décomposition en éléments simples. — Mais la plus importante des applications est celle qu'on peut faire à la construction des fonctions elliptiques. Je remarque d'abord qu'une fonction elliptique $f(z)$ qui n'a pas de pôle dans un parallélogramme de périodes est une constante; en effet, d'abord elle n'a pas non plus de zéros (*voir* Deuxième application), ensuite la fonction $f(z)$ — const. est une fonction de même nature qui ne peut pas non plus s'annuler, et l'on voit que $f(z)$ n'existe pas, en tant que fonction elliptique; elle peut être une constante parce que, dans ce cas, la démonstration du théorème général sur lequel nous nous sommes appuyé n'existe plus.

Cela posé, proposons-nous de *trouver une fonction elliptique*

qui ait pour pôles

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n,$$

et pour zéros (en nombre égal)

$$b_1 \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_n.$$

On sait que

$$\Sigma a_i = \Sigma b_i + 2\omega.$$

La fonction, dans laquelle A désigne une constante,

$$(c) \qquad f(u) = \mathrm{A}\,\frac{\sigma(u-b_1)\,\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_n-2\omega)}{\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_n)}$$

est une solution; en effet, elle admet bien les pôles et les zéros donnés et de plus elle a les périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$. Pour montrer ce dernier point, appliquons la première formule (29)

$$f(u+2\omega_\alpha) = f(u)\,\frac{e^{2\eta_\alpha(nu-b_1-b_2\ldots-b_n+n\omega_\alpha-2\omega)}}{e^{2\eta_\alpha(nu-a_1-a_2\ldots-a_n+n\omega_\alpha)}} = f(u).$$

Et, sauf un facteur constant, il n'y a pas d'autre solution; car le quotient de toute nouvelle solution par $f(u)$ serait une fonction elliptique sans pôles ni zéros, c'est-à-dire une constante.

Dans les notations de Jacobi, c'est la fonction θ qui remplace la fonction σ; on a donc pour solution

$$(c') \qquad f(u) = \mathrm{A}\,\frac{\theta(u-b_1)\,\theta(u-b_2)\ldots\theta(u-b_n-2\omega)}{\theta(u-a_1)\,\theta(u-a_2)\ldots\theta(u-a_n)}.$$

Par exemple, décomposons $pu - pv$ en facteurs; la fonction de u, $pu - pv$, a, dans le parallélogramme des périodes qui a l'origine pour centre, un pôle double, l'origine, et deux zéros qui sont évidemment v et $-v$. Donc, d'après la formule (c), on doit poser

$$pu - pv = \mathrm{A}\,\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u},$$

et il n'y a plus à déterminer que A; or, si l'on suppose u infiniment petit, la partie principale du premier membre est $\frac{1}{u^2}$, celle du second membre $\frac{\mathrm{A}\,\sigma v\,\sigma(-v)}{u^2}$ ou $\frac{-\mathrm{A}\,\sigma^2 v}{u^2}$; en les égalant, on trouve

$$\mathrm{A} = -\frac{1}{\sigma^2 v}.$$

Donc enfin

$$pu - pv = -\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v}.$$

C'est la formule (32'), p. 41.

Le problème de la décomposition en éléments simples est le suivant :

Trouver une fonction elliptique connaissant ses pôles et la partie infinie de son développement aux environs de chacun d'eux.

Si a est un pôle, on sait que la fonction $f(u)$ est de la forme

$$f(u) = \frac{A_\alpha}{(u-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(u-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{u-a} + \text{fonction holomorphe,}$$

de même dans le voisinage du pôle donné b, on donne la partie infinie

$$\frac{B_\beta}{(u-b)_\beta} + \frac{B_{\beta-1}}{(u-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_1}{u-b} + \ldots.$$

Cela posé construisons la fonction $\varphi(u)$ suivante :

$$(d)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(u) = {} & A_1\zeta(u-a) - A_2\zeta'(u-a) + \frac{A_3}{1.2}\zeta''(u-a) + \ldots + (-1)^{\alpha-2}\frac{A_\alpha}{(\alpha-1)!}\zeta^{(\alpha-1)}(u- \\ & + B_1\zeta(u-b) - B_2\zeta'(u-b) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{\beta-1}\frac{B_\beta}{(\beta-1)!}\zeta^{(\beta-1)}(u- \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Je dis d'abord que $\varphi(u)$ est une fonction doublement périodique; toutes les dérivées étant elliptiques, il suffit de considérer la somme $\psi(u)$ des premiers termes de chaque ligne

$$\psi(u) = A_1\zeta(u-a) + B_1\zeta(u-b) + \ldots.$$

On aura alors, par application de la formule (35),

$$\psi(u+2\omega_i) = (A_1 + B_1 + \ldots)\,2\eta_i + \psi(u);$$

mais (Deuxième application) la somme des résidus $A_1 + B_1 + \ldots$ est nulle : donc $\psi(u)$ est une fonction elliptique et, par suite, $\varphi(u)$ aussi. De plus $\varphi(u)$ admet les pôles a, b, ... Enfin, comme

on a

$$\zeta(u-a) = \frac{1}{u-a} + \text{fonction holomorphe},$$

$$\zeta'(u-a) = -\frac{1}{(u-a)^2} + \ldots,$$

$$\zeta''(u-a) = \frac{1}{(u-a)^3} + \ldots.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\zeta^{(\alpha-1)}(u-a) = (-1)^{\alpha-1}\frac{(\alpha-1)!}{(u-a)^\alpha} + \ldots.$$

la partie infinie de $\varphi(u)$ dans le voisinage du pôle a sera bien celle qui était donnée; $\varphi(u)$ est une solution du problème et, sauf l'addition d'une constante, il n'y en a pas d'autres, car la différence $f(u) - \varphi(u)$ étant une fonction elliptique sans pôle ne peut être qu'une constante comme on l'a montré au commencement de ce paragraphe. La solution générale est donc $\varphi(u) + c$.

La forme de la solution est la même avec les notations de Jacobi, la fonction Zu de Jacobi ne différant de la fonction ζu de Weierstrass que par un terme en u qui disparaît dans la somme appelée par nous $\varphi(u)$.

Le beau problème que nous venons de résoudre, dû à M. Hermite, a reçu de cet illustre savant de nombreuses applications; il est aussi puissant comme instrument de recherches que comme procédé de démonstration. Établissons, par exemple, la formule d'addition (57) de la fonction pu : la fraction

$$\varphi(u) = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2$$

admet comme pôle $u = -v$ et $u = 0$ ($u = v$ n'est pas un pôle annulant les deux termes de la fraction et n'annulant pas le rapport des dérivées).

Ces pôles sont doubles et, de plus, on a, dans le voisinage de $u = 0$,

$$pu = \frac{1}{u^2} + \ldots.$$

$$p'u = \frac{2}{u^3} + \ldots,$$

$$\varphi(u) = \frac{1}{u^2} + \text{fonction holomorphe},$$

dans le voisinage de $u = -v$, à cause de

$$pu = p(-v+u+v) = pv - (u+v)p'v + \ldots,$$

$$\varphi(u) = \frac{1}{(u+v)^2} + \text{fonction holomorphe.}$$

On doit donc poser, en appliquant la formule (d),

$$\varphi(u) = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2 = -\zeta'(u+v) - \zeta'(u) + \text{const.}$$
$$= \quad p(u+v) + pu \quad + \text{const.}$$

Pour trouver la valeur de la constante il n'y a plus qu'à faire $u = 0$ après avoir retranché $\frac{1}{u^2}$ dans les deux membres; le second devient $pv + \text{const}$. Quant au premier il peut s'écrire successivement

$$\frac{1}{4}\left(\frac{-\frac{2}{u^3} - p'v + \ldots}{\frac{1}{u^2} - pv + \ldots}\right)^2 = \frac{1}{4u^2}(-2 - u^3p'v - \ldots)(1 - u^2pv + \ldots)^{-2}$$
$$= \frac{1}{4u^2}(-2 - \ldots)^2(1 + 2u^2pv + \ldots),$$
$$= \frac{1}{u^2} + 2pv;$$

par suite la valeur de la constante est pv et l'on a

$$\frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2 = p(u+v) + pu + pv$$

ce qui est bien la formule (57).

Troisième procédé. — Enfin le même théorème permet d'exprimer toute fonction elliptique au moyen de fonctions pu et $p'u$.

Trois cas peuvent se présenter :

1° La fonction $f(u)$ qu'il s'agit d'exprimer est paire. Soient alors

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n \qquad \text{ses zéros,}$$
$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_p \qquad \text{ses infinis,}$$

non congrus à zéro. La solution est évidemment

$$f(u) = A\frac{(pu - pa_1)(pu - pa_2)\ldots(pu - pa_n)}{(pu - pb_1)(pu - pb_2)\ldots(pu - pb_p)};$$

la démonstration s'établit comme pour la formule (c). Si l'origine n'est ni zéro ni pôle, $p = n$.

2° La fonction $f(u)$ est impaire, alors son quotient par $p'u$ est pair et l'on est ramené au cas précédent.

3° $f(u)$ n'est ni paire, ni impaire; on peut la considérer comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire

$$f(u) = \frac{f(u) + f(-u)}{2} + \frac{f(u) - f(-u)}{2},$$

et l'on sait exprimer chacune de ces fractions en fonction rationnelle de pu et de $p'u$.

Multiplication de l'argument. — Ce sont encore les mêmes théorèmes qui permettront de calculer la fonction elliptique $f(nu)$ en fonction de $f(u)$. D'abord la formule de décomposition en éléments simples permet d'écrire immédiatement

$$n^2 pnu = pu + \sum p\left(u + \frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n}\right) + C,$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs entières de m_1 et m_2, non nulles en même temps, de 0 à $n - 1$; en effet, les deux membres ont les mêmes pôles et les mêmes parties infinies pour les développements aux environs des pôles. Intégrons les deux membres de l'équation précédente, il vient

$$n\zeta nu = \zeta u + \sum \zeta\left(u + \frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n}\right) - Cu + C'.$$

L'addition de $2\omega_1$ à l'argument u augmente le premier membre de $n\,2n\eta_1$ et le second de $n^2\,2\eta_1 - 2C\omega_1$; donc C est nul, et l'on a la première formule de multiplication

$$(e) \qquad n^2 pnu = pu + \sum p\left(u + \frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n}\right).$$

Pour établir une autre formule, je partirai de la formule (32') dans laquelle je remplace u par mu et v par nu; elle devient

$$(f) \qquad pmu - pnu = -\frac{\sigma(m+n)u\,\sigma(m-n)u}{\sigma^2 mu\,\sigma^2 nu}.$$

Introduisons une fonction auxiliaire

$$(g) \qquad \psi_n(u) = \frac{\sigma nu}{(\sigma u)^{n^2}}.$$

qui est une fonction périodique de périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, qui a l'origine pour pôle d'ordre $n^2 - 1$ et qui a $n^2 - 1$ zéros simples compris dans la formule

$$\frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n},$$

où m_1 et m_2 peuvent recevoir les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$, sans pouvoir être nulles en même temps.

L'équation (f) s'écrit

$$(h) \qquad pmu - pnu = -\frac{\psi_{m+n}(u)\psi_{m-n}(u)}{\psi_m^2(u)\psi_n^2(u)},$$

et l'on aperçoit facilement que l'identité

$$(pmu - pnu) + (pnu - plu) + (plu - pmu) = 0$$

fournira entre les fonctions ψ une relation de récurrence qui permettra de calculer une quelconque d'entre elles connaissant les premières. Or les valeurs de ces premières ont été données page 71 (Exercices **11** et **12**), on peut donc considérer $\psi_n(u)$ comme exprimées en fonction de pu et de $p'u$.

Alors la formule (g) constitue une formule de multiplication pour σu, et il suffira de faire $n = 1$ dans (h) pour avoir une nouvelle formule de multiplication pour pu

$$(i) \qquad pmu = pu - \frac{\psi_{m+1}(u)\psi_{m-1}(u)}{\psi_m^2 u}.$$

La dernière fraction est, comme cela résulte de (g), une fonction elliptique paire de u; elle s'exprime donc rationnellement en fonction de pu. Il en est d'ailleurs de même de la fonction $\psi_n(u)$ si n est impair, ou de son quotient par $p'u$ si n est pair, parce que, dans le premier cas, de $\psi_n(u)$ est paire; dans le second, impaire. La fonction rationnelle sera même ici entière, parce qu'il n'y a pas d'autres pôles que l'origine. En remplaçant dans l'identité

$$\psi_n^2(u) = \left[\frac{\sigma nu}{(\sigma u)^{n^2}}\right] = (\text{polynome en } pu)^2,$$

σu, $\sigma n u$ et $p u$ par leurs développements en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de u, on pourra déterminer les coefficients de $\psi_n^2(u)$ qui seront ainsi des fonctions entières des coefficients des séries précédentes ou de g_2 et de g_3.

Addition des fonctions de Jacobi. — La même théorie permet d'obtenir rapidement les formules d'addition de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ et $\operatorname{dn} u$. Elles se déduisent d'une même formule

$$(j) \qquad \operatorname{cn}\alpha = \operatorname{cn} u \operatorname{cn}(u-\alpha) + \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-\alpha)\operatorname{dn}\alpha,$$

qui se démontre sans peine. En effet, considérées comme fonction de u, les deux quantités

$$\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-\alpha)$$

et

$$\operatorname{cn} u \operatorname{cn}(u-\alpha) - \operatorname{cn}\alpha$$

sont doublement périodiques aux périodes $2K$ et $2iK'$; elles ont deux pôles dans un parallélogramme de périodes, savoir les zéros simples de $\theta_2 u$ et de $\theta_2(u-\alpha)$ (form. 46). Elles n'ont donc aussi, dans un même parallélogramme, que deux zéros qui s'aperçoivent immédiatement et qui sont les mêmes pour les deux quantités, savoir zéro et α. Le rapport de ces deux quantités est donc constant et l'on a

$$A \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-\alpha) = \operatorname{cn} u \operatorname{cn}(u-\alpha) - \operatorname{cn}\alpha.$$

Pour déterminer A, je ferai $u\sqrt{\lambda} = \omega_1 = K\sqrt{\lambda}$, et il résulte des formules (46), (17) et (14) que

$$-\operatorname{cn}\alpha = A\frac{\operatorname{cn}\alpha}{\operatorname{dn}\alpha},$$

$$A = -\operatorname{dn}\alpha.$$

La formule (j) est donc démontrée.

Il n'y a plus qu'à remplacer dans cette formule α par $-v$ et à échanger ensuite v et u pour avoir deux équations, d'où l'on tirera $\operatorname{sn}(u+v)$ et $\operatorname{cn}(u+v)$. On trouve ainsi

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{cn}^2 v}{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u - \operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v};$$

en multipliant haut et bas par la quantité conjuguée, on retrouve

aisément la première formule de la page 68 (Exercice 8). Il suffit de remarquer que $\mathrm{cn}^2 u - \mathrm{cn}^2 v = \mathrm{sn}^2 v - \mathrm{sn}^2 u$ et que

$$\mathrm{sn}^2 v\, \mathrm{cn}^2 u\, \mathrm{dn}^2 u - \mathrm{sn}^2 u\, \mathrm{cn}^2 v\, \mathrm{dn}^2 v = (\mathrm{sn}^2 v - \mathrm{sn}^2 u)(1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u\, \mathrm{sn}^2 v).$$

$\mathrm{cn}(u+v)$ s'obtient de même, et la formule (j) permet alors, en y faisant $\alpha = u + v$, d'obtenir $\mathrm{dn}(u+v)$.

NOTES.

I.

Nous avons indiqué page 81 un théorème général qui permet de reconnaître si une intégrale algébrique peut être ramenée aux fonctions elliptiques, et nous en avons déjà rencontré page 123 une intéressante application. En voici quelques autres cas particuliers.

Les deux intégrales suivantes ont été étudiées par M. le comte de Sparre (¹) qui a cherché des procédés de réduction n'entraînant pas de calculs compliqués :

$$I_1 = \int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt[4]{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + F}},$$

$$I_2 = \int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt[4]{(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + F)^3}}.$$

Le procédé que nous avons indiqué page 78 peut s'appliquer aux deux intégrales I_1 et I_2; nous supposerons donc que la quantité sous le radical ait la forme

$$\pm(x^2 - \beta)(x^2 - \gamma);$$

quant au numérateur, en l'écrivant $F_1(x^2) + xF_1(x^2)$ et en remplaçant, dans les intégrales correspondantes à $F_1(x^2)$, x par $\frac{1}{x}$, on voit que finalement on n'a à considérer que des intégrales de la forme

$$I'_1 = \int \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt[4]{\pm(x^2 - \beta)(x^2 - \gamma)}}, \qquad I'_2 = \int \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt[4]{\pm(x^2 - \beta)^3(x^2 - \gamma)^3}},$$

(¹) *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XXI, IIe Partie; 1897.

et l'on peut toujours supposer $\beta > \gamma$. Il n'y a plus qu'à poser

$$x^2 = \beta \operatorname{séc}^2\varphi - \gamma \operatorname{tang}^2\varphi,$$

si l'on a le signe $+$ sous le radical, et

$$x^2 = \beta \cos^2\varphi + \gamma \sin^2\varphi,$$

si l'on a le signe $-$, pour avoir ramené aux intégrales elliptiques. (*Voir* aussi LEGENDRE, *Fonct. ellipt.*, t. I, p. 252.)

Serret (*Calcul intégral*, p. 65; 1868) réduit l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}}$$

par la substitution

$$x^3 + \frac{1}{x_3} = 2t^{-\frac{2}{3}}.$$

L'intégrale

$$J = \int \frac{dz}{\sqrt[6]{(x+a)^2(x+b)^5(x+c)^5}}$$

dépend aussi des fonctions elliptiques. Posons, en effet,

$$x = \frac{1}{z} - a,$$

$$\beta = b - a, \qquad \gamma = c - a.$$

Nous obtenons, après suppression du facteur $-\beta^{\frac{5}{6}}\gamma^{\frac{5}{6}}$,

$$J_1 = \int \frac{dz}{\sqrt[6]{(z+\alpha)^5(z+\beta)^5}}.$$

Le trinome $(z+\alpha)(z+\beta)$ pouvant se mettre sous la forme $\left(z + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$, une première transformation se présente qui consiste à poser

$$\left(z + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 = t$$

et l'on tombe sur une première forme facile à réduire. Je poserai de préférence

$$\frac{dz}{\sqrt[3]{(z+\alpha)^2(z+\beta)^2}} = d\xi$$

avec la condition que z soit infini pour $\xi = 0$. Il suffit alors de

poser

$$\sqrt[3]{(z+\alpha)(z+\beta)} = \mathrm{A}\,u$$

pour que l'équation différentielle donne

$$u = p\xi, \qquad \mathrm{A} = 9$$

avec

$$g_2 = 0, \qquad g_3 = -\frac{(\alpha-\beta)^2}{27};$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{J}_1 = -\frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{4u^4 + \left(\frac{\alpha-\beta}{27}\right)^2 u}}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On trouvera aux Exercices d'autres exemples.

II.

DÉGÉNÉRESCENCES.

Nous avons eu l'occasion, dans le cours du Précis, de signaler certains cas où les fonctions elliptiques dégénèrent en fonctions circulaires ou logarithmiques. Cela arrive si le module $k = 0$ ou si $k = 1$.

Résumons sans démonstration les formules relatives à ces deux cas; les formules qui suivent, faciles à obtenir, sont extraites du *Traité des fonctions elliptiques* d'Halphen.

1° $k = 0$:

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sn} u & \text{devient} & \sin u, \\ \operatorname{cn} u & & \cos u, \\ \operatorname{dn} u & & 1, \\ \mathrm{K} & & \frac{\pi}{2} \qquad (\mathrm{K}' = \infty), \end{array}$$

$$e_2 = e_3 = -\frac{1}{2}e_1, \qquad g_2 = 3e_1^2, \qquad g_3 = e_1^3,$$

$$\Delta = 0, \qquad \frac{1}{\lambda} = \frac{2g_2}{9g_3} = \left(\frac{2\omega_1}{\pi}\right)^2, \qquad \omega' = \infty,$$

$$g_3 > 0,$$

$$pu = -\frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda}{\sin^2 u\sqrt{\lambda}}, \qquad \lim \frac{e^{-\pi\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}}}{k^2} = \frac{1}{16},$$

$$\zeta u = \frac{\lambda}{3} u + \frac{\pi}{2\omega_1} \cot \frac{\pi u}{2\omega_1}, \qquad \eta_1 \omega_1 = \frac{\pi^2}{12},$$

$$\sigma u = \frac{2\omega_1}{\pi} \sin \frac{\pi u}{2\omega_1} e^{\frac{1}{6}\left(\frac{\pi u}{2\omega_1}\right)^2}.$$

2° $k = 1$:

$$\operatorname{sn} u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}, \qquad \operatorname{cn} u = \operatorname{dn} u = \frac{2}{e^u + e^{-u}},$$

$$K = \infty, \qquad K' = \frac{\pi}{2},$$

$$e = e_1 = -\frac{1}{2} e_3, \qquad g_2 = 3 e_3^2, \qquad g_3 = e_3^3,$$

$$\Delta = 0, \qquad \frac{1}{\lambda} = -\frac{2 g_2}{9 g_3} = -\frac{2}{3} e_3,$$

$$g_3 < 0, \qquad p u = -\frac{\lambda}{3} + \lambda \left(\frac{e^{u\sqrt{\lambda}} + e^{-u\sqrt{\lambda}}}{e^{u\sqrt{\lambda}} - e^{-u\sqrt{\lambda}}} \right)^2,$$

$$\omega_1 = \infty, \qquad \omega_2 = \frac{\pi i}{2\sqrt{3 e_1}},$$

$$\lim \frac{e^{-\pi \frac{K}{K'}}}{1 - k^2} = \frac{1}{16},$$

$$\zeta u = -\frac{\lambda}{3} u - \frac{\pi i}{2\omega_2} \frac{e^{-\pi v} + e^{\pi v}}{e^{-\pi v} - e^{\pi v}} \qquad \text{avec} \qquad v = \frac{u i}{2\omega_2},$$

$$\eta_2 \omega_2 = \frac{\pi^2}{12},$$

$$\sigma u = \frac{2\omega_2}{i\pi} \frac{e^{\frac{\pi i u}{2\omega_2}} - e^{-\frac{\pi i u}{2\omega_2}}}{2} e^{-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi i u}{2\omega_2}\right)^2}.$$

3° $e_1 = e_2 = e_3 = 0$:

$$g_2 = 0, \qquad g_3 = 0, \qquad \omega_1 = \infty, \qquad \omega_2 = \infty,$$

$$p u = \frac{1}{u^2}, \qquad \zeta u = \frac{1}{u}, \qquad \sigma u = u.$$

III.

Nous avons indiqué, pages 75 et suivantes, le moyen d'effectuer l'inversion des intégrales elliptiques en réduisant autant que possible aux fonctions pu. Il peut être plus rapide d'introduire immédiatement les fonctions de Jacobi.

On a vu que le polynome sous le radical peut toujours être mis sous la forme $(Mx^2+N)(M'x^2+N')$, ou, en posant $x=\sqrt{\pm\frac{N}{M}}y$, $M(1+\alpha x^2)(\beta x^2+\gamma)$. Je vais indiquer quelles sont les transformations les plus commodes suivant les signes des lettres α, β, γ.

Reproduisons d'abord les équations (65) et (65 *bis*) :

$$\frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial u} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

$$\frac{\partial \operatorname{cn} u}{\partial u} = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u,$$

$$\frac{\partial \operatorname{dn} u}{\partial u} = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u,$$

qui, à cause des équations (53), peuvent s'écrire, en posant $\operatorname{sn} u = x$, $\operatorname{cn} u = y$, $\operatorname{dn} u = z$,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\sqrt{(1-y^2)(k'^2+k^2y^2)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = -\sqrt{(1-z^2)(z^2-k'^2)}.$$

La première de ces équations montre qu'on opérera l'inversion de

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

en posant

$$x = \operatorname{sn}(u, k),$$

ce que nous savions.

De la seconde on déduit que la fonction inverse de

$$v = \int_y^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(k'^2+k^2y^2)}}$$

est

$$y = \operatorname{cn}(v, k),$$

et de la troisième que l'inversion de

$$w = \int_z^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-k'^2)}}$$

s'obtient en posant

$$z = \mathrm{dn}(w, k).$$

Enfin, posons

$$t = \frac{\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{cn}\, u},$$

il en résulte

$$\frac{\partial t}{\partial u} = \sqrt{(1 + t^2)(1 + k'^2 t^2)},$$

ou

$$u = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1 + t^2)(1 + k'^2 t^2)}}.$$

Ces formules suffiront, dans tous les cas, au besoin en remplaçant une quantité par son inverse, pour effectuer l'inversion d'une intégrale elliptique en quantités réelles.

IV [1].

APPLICATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES A L'ÉTUDE DU TIR VERTICAL DES PROJECTILES, DANS LE CAS DE LA RÉSISTANCE PROPORTIONNELLE A LA QUATRIÈME PUISSANCE DE LA VITESSE. (NOUS APPELONS TIR VERTICAL UN TIR DANS LEQUEL LA TANGENTE A LA TRAJECTOIRE FAIT AVEC L'HORIZON UN ANGLE SUPÉRIEUR A 75°.)

Nous supposerons l'accélération de la résistance de l'air exprimé par la formule [2]

$$J = g\frac{v^4}{\chi^4} \qquad \text{où} \qquad \chi^4 = \frac{pg}{i\Delta d^2 A},$$

p étant le poids en kilogrammes du projectile;
d son calibre en décimètres;
Δ la densité de l'air;

---

[1] Nous devons cette Note à l'obligeance de M. le comte de Sparre; les lecteurs qui s'intéressent aux applications numériques, c'est-à-dire véritablement pratiques, des fonctions elliptiques, liront avec fruit les quatre Mémoires sur le tir courbe que M. de Sparre a publiés dans le *Mémorial de l'Artillerie de Marine*, en 1892, 1893, 1894 et 1896. La présente Note est extraite du quatrième Mémoire.

[2] On peut admettre cette hypothèse si la vitesse reste comprise entre 240^m et 420^m.

g l'accélération de la pesanteur en mètres;
i un coefficient égal à 1 pour le projectile type;
J l'accélération de la résistance de l'air en mètres;
A un coefficient variable avec les limites entre lesquelles la vitesse reste comprise, mais qui diffère assez peu de la valeur fournie par la formule

$$\log A = \bar{8},30129.$$

Nous supposerons de plus que l'angle que fait la tangente à la trajectoire avec la verticale est assez faible pour que l'on puisse remplacer $\sin\theta$ par une quantité constante $\frac{1}{\alpha}$, comme Didion l'a fait, pour $\cos\theta$, dans le cas où la tangente est peu inclinée sur l'horizon.

On pourra admettre cette dernière hypothèse tant que θ sera compris entre 75° et 90°, surtout si l'arc que l'on considère est peu étendu.

En effet, pour 75°,

$$\sin\theta = 0,966 = 1 - 0,034.$$

On a alors

$$\text{(A)} \qquad \frac{dv}{dt} = -g\sin\theta - J = -g\sin\theta\left(1 + \frac{v^4}{\chi^4\sin\theta}\right),$$

et, comme $\frac{dy}{dt} = v\sin\theta$,

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{g}{v}\left(1 + \frac{v^4}{\chi^4\sin\theta}\right).$$

Si alors le mouvement est ascendant, on posera

$$\text{(B)} \qquad \sin\theta = \frac{1}{\alpha}, \qquad \frac{\chi^4}{\alpha} = \chi_1^4,$$

et l'on aura

$$\text{(C)} \qquad \frac{v\,dv}{1 + \frac{v^4}{\chi_1^4}} = -g\,dy;$$

l'équation (A) deviendra d'ailleurs, en tenant compte des relations (B),

$$\text{(D)} \qquad \frac{g\,dt}{\alpha} = -\frac{dv}{1 + \frac{v^4}{\chi_1^4}},$$

et, en joignant à ces relations l'équation

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{d\theta}{dx}\frac{dx}{dy} = -\frac{g}{v^2}\cot\theta,$$

on aura

$$\text{(E)} \qquad \operatorname{tang}\theta\, d\theta = \frac{dv}{v\left(1+\frac{v^4}{\chi_1^4}\right)}.$$

S'il s'agissait du mouvement descendant, il suffirait de remplacer α par $-\alpha$ et χ_1^4 par $-\chi_1^4$. Dans l'un comme dans l'autre cas, les équations (C), (D), (E) fourniront en fonction de v, y, t et θ par les fonctions élémentaires.

Reste à calculer x. Examinons séparément le cas du mouvement ascendant et du mouvement descendant.

1° *Mouvement ascendant.* — Si l'on pose

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{v^2}{\chi_1^2},$$

on aura, par l'équation (C),

$$dy = -\frac{\chi_1^2}{2g}d\psi$$

ou

$$\text{(6)} \qquad y = \frac{\chi_1^2}{2g}(\psi_0 - \psi),$$

puis, par l'équation (E),

$$\frac{d\cos\theta}{\cos\theta} = -\frac{1}{2}\frac{\cos\psi\, d\psi}{\sin\psi};$$

d'où

$$\cos\theta = \cos\theta_0\sqrt{\frac{\sin\psi_0}{\sin\psi}}.$$

On a ensuite

$$dx = \cot\theta\, dy = \alpha\cos\theta\, dy,$$

en remplaçant toujours $\sin\theta$ par $\frac{1}{\alpha}$, ou

$$\text{(F)} \qquad dx = -\frac{\alpha\chi_1^2}{2g}\cos\theta_0\sqrt{\frac{\sin\psi_0}{\sin\psi}}\,d\psi.$$

Posons alors (Note III)

$$\sin\psi = x^2 = \operatorname{cn}^2 u \qquad \text{avec} \qquad k^2 = \frac{1}{2},$$

d'où

$$d\psi = -2\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\sqrt{1-\operatorname{cn}^4 u}}\,du.$$

Mais, puisque $k^2 = \frac{1}{2}$,

$$1-\operatorname{cn}^4 u = (1-\operatorname{cn}^2 u)(1+\operatorname{cn}^2 u) = 2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u;$$

donc

$$d\psi = -\sqrt{2}\operatorname{cn} u\, du$$

et

$$\frac{d\psi}{\sqrt{\sin\psi}} = -\sqrt{2}\,du;$$

donc

$$dx = \frac{\alpha\chi_1^2 \cos\theta_0 \sqrt{\sin\psi_0}}{g\sqrt{2}}\,du$$

et

$$\text{(G)} \qquad x = \frac{\alpha\chi_1^2 \cos\theta_0 \sqrt{\sin\psi_0}}{g\sqrt{2}}(u-u_0).$$

Il faut maintenant calculer u; pour cela, nous calculerons d'abord $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$ et K.

Dans le cas actuel, comme $k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a aussi $K = K'$, et, par suite,

$$q = e^{-\pi};$$

on en déduit

$$\log\log\frac{1}{q} = \log\pi + \log\log e = 0,1349342,$$

d'où

$$\log\frac{1}{q} = 1,3643764,$$

$$\log q = \bar{2},6356236, \qquad q = 0,04321391.$$

Cette valeur de q nous fait voir que, dans les calculs balistiques, qui ne demandent pas une très grande approximation, on pourra toujours négliger les termes en q^4 et même, le plus souvent, ceux en q^2.

Or, si l'on néglige les termes en q^4, on a (p. 168)

$$2q = \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} \qquad 2K = (1+2q)^2.$$

Mais si l'on pose $\left(\text{puisque, dans le cas actuel, } k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\sqrt{k} = \sqrt{k'} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = \cos z,$$

d'où

$$\log \cos z = 1,9247425,$$
$$z = 32^\circ 45' 54'',37,$$

les formules précédentes donnent

$$q = \frac{1}{2} \operatorname{tang}^2 \frac{z}{2}, \qquad K = \frac{\pi}{2 \cos^4 \frac{z}{2}}.$$

On tirerait de ces formules

$$\log q = \bar{2},6356207, \qquad \log K = 0,2681213 \quad (^1),$$
$$q = 0,0432136 2.$$

Si l'on compare la valeur de q que nous venons d'obtenir en négligeant les termes en q^4 à celle donnée plus haut, on voit que cette différence est complètement négligeable pour l'approximation que l'on a à demander aux calculs balistiques. On peut même remarquer que, si l'on s'était servi de Tables à 5 décimales, ainsi qu'on le fait d'ordinaire pour ces calculs, on n'en aurait trouvé aucune. Ceci prouve bien qu'il est légitime, ainsi que nous allons le faire dans ce qui va suivre, de négliger les termes en q^4.

Passons maintenant au calcul de u.

On a pour cela $\left(\text{puisqu'ici } k^2 = \frac{1}{2}\right)$

$$\operatorname{dn}^2 u = \frac{1 + \operatorname{cn}^2 u}{2} = \frac{1 + \sin \psi}{2} = \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right),$$

donc

$$\operatorname{dn} u = \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right).$$

Mais, aux termes en q^4 près, et puisque

$$\cos z = \sqrt{k'},$$

---

(1) La valeur exacte serait (Tables du Traité de M. Bertrand)

$$\log K = 0,2681272.$$

on a, formules (46) et (13)

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{k'}\,\frac{\theta_3(u)}{\theta(u)} = \cos z\,\frac{1 + 2q\cos\frac{\pi u}{K}}{1 - 2q\cos\frac{\pi u}{K}},$$

donc

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right)}{\cos z} = \frac{1 + 2q\cos\frac{\pi u}{K}}{1 - 2q\cos\frac{\pi u}{K}},$$

d'où

$$2q\cos\frac{\pi u}{K} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right) - \cos z}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right) + \cos z} = \operatorname{tang}\left(\frac{z}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{\psi}{4}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{z}{2} + \frac{\psi}{4} - \frac{\pi}{8}\right),$$

et, en tenant compte de la valeur de q,

$$\text{(H)} \qquad \cos\frac{\pi u}{K} = \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{z}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{\psi}{4}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{z}{2} + \frac{\psi}{4} - \frac{\pi}{8}\right)}{\operatorname{tang}^2\frac{z}{2}}.$$

La formule (H) donnera de suite u lorsque ψ sera connu, puisque K et z ont les valeurs données plus haut. Rappelons que

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{tang}\psi = \frac{v^2}{\chi_1^2},$$

u et u_0 étant connus, (G) donnera x.

Mouvement descendant. — Dans ce cas, on doit remplacer α par $-\alpha$ (θ est négatif et voisin de -90°), χ_1^4 par $-\chi_1^4$.

Le calcul se présente comme dans le cas du mouvement ascendant; voici les seules différences. Au lieu de la formule (I), on aura à poser $\frac{v^2}{\chi^2} = \cos\varphi$, puis $2\varphi = \psi$ pour trouver des résultats de même forme que dans le premier cas. De plus, pour le premier cas, mouvement ascendant, u est déterminé sans ambiguïté par la formule (H), car, en vertu de la formule (I), ψ décroît de 90° à 0° lorsque v décroît de ∞ à 0, et par suite, en vertu de la relation $\sin\psi = \operatorname{cn}^2 u$, u croît de 0 à K; u étant donc compris entre 0 et K, la formule (H) le détermine sans aucune ambiguïté.

Il n'en est pas de même si le mouvement est descendant; en

effet, dans le cas actuel, v peut croître de o à sa valeur limite χ_1, et, lorsque v croît de o à χ_1, φ décroît de 90° à o et, par suite, comme $\psi = 2\varphi$, ψ décroît de 180° à o. Mais nous remarquerons que nous avons supposé que u croissait avec x, c'est-à-dire lorsque ψ décroît, et comme, pour $u = 0$, on a $\sin\psi = 1$, d'où $\psi = 90°$ et $\varphi = 45°$, on en conclut que l'on devra prendre

$$-K < u < 0 \quad \text{si} \quad \varphi > 45°$$

et

$$0 < u < K \quad \text{si} \quad \varphi < 45°.$$

De cette façon, u se trouve déterminé aussi dans ce cas sans aucune ambiguïté.

Exercices divers.

1. Démontrer la formule

$$\left(\frac{\sigma nu}{\sigma^{n^2} u}\right)^2 = n^2 \prod \left(pu - p\,\frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n}\right),$$

le produit $\prod$ s'étendant à toutes les valeurs entières de m_1 et m_2 comprises entre o (non exclu) à n (exclu), non nulles en même temps.

2. Réduire aux fonctions elliptiques les intégrales

$$\int \frac{dz}{(1+pz^2)\sqrt[3]{1+qz^2}}, \quad \int \frac{d\varphi}{\sqrt[4]{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int \frac{d\varphi}{\sqrt[3]{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

(LEGENDRE, *Fonct. ellipt.*, t. I, p. 165, 178, 780; 1825.)

3. Réduire les intégrales

$$\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Cx^4 + Bx^5 + Ax^6}},$$

$F(x)$ étant une fonction rationnelle, et

$$z = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{\frac{128}{3}(x+a)^2(x+b)^3}}$$

(on trouve $x = 6p^2 z - b$).

4. Réduire aux fonctions elliptiques les intégrales suivantes :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x+a)(x+b)^2(x+c)^3}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+a)(x+b)(x+c)}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x+a)^3(x+b)^4(x+c)^5}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+a)^2(x+b)^2(x+c)^2}},$$

et, en général, chercher les formes réductibles comprises dans le type

$$\int \frac{dx}{\sqrt[m]{(x+a)^\alpha(x+b)^\beta(x+c)^\gamma}}.$$

5. Étant donné

$$g_2 = 0, \qquad g_3 = -\frac{1}{3^6}\frac{(b-c)^2}{(a-b)^2(a-c)^2},$$

$$pz_0 = \frac{1}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{(a-b)(a-c)}},$$

si $z_0 = \frac{2\omega}{m}$ est une partie commensurable d'une période, l'intégrale

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)(x-b)(x-c)}},$$

s'exprime par des logarithmes.

On pose

$$x = a + \frac{1}{\frac{27}{2}p'z + \frac{a'+b'}{2}},$$

avec

$$a' = -\frac{1}{a-b}, \qquad b' = -\frac{1}{a-c}.$$

On trouve

$$= \frac{1}{m}\log\prod_{\rho=0}^{\rho=m-1}\left\{[p(z-\rho z_0)-pz_0][p(z-\rho\varepsilon z_0)-p\varepsilon z_0]^{\varepsilon^2}[p(z-\rho\varepsilon^2 z_0)-p\varepsilon^2 z_0]^{\varepsilon}\right\}^{\rho-1},$$

$$\varepsilon^3 = 1,$$

Cas particuliers.

1° $\qquad a = 0, \qquad b = -c;$

2° $\qquad a^3 = b^3 = c^3 = 1.$

(Dolbnia, *Bull. Sc. math.*, mai 1893.) *Comparez* à la page 133 du *Précis*.

6. Étant donné

$$g_2 = 0, \qquad g_3 = \frac{1}{3^6}\frac{(b-c)^2}{(a-b)^2(a-c)^2},$$

$$pz_0 = \frac{1}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{(a-b)(a-c)}},$$

si z_0 est une partie commensurable d'une période, l'intégrale

$$\int \frac{(x+\mathrm{H})\,dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}}$$

s'exprime par des logarithmes, l'indéterminée H étant choisie sous la condition

$$3\zeta(z_0) - 3\frac{2\eta}{m} - \sqrt[3]{a'^2 b'^2}\,(a+\mathrm{H}) = 0.$$

La substitution et les notations sont les mêmes que dans l'exercice précédent.

7. Étant donné

$$g_2 = 0, \qquad g_3 = \frac{b-a}{30(a-c)(b-c)}, \qquad \beta = \frac{1}{c-b},$$

si $z_0 = \frac{2\omega}{m}$ est une partie commensurable d'une période, l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int \frac{(x+\mathrm{H})\,dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^3(x-c)^4}}$$

s'exprime par des logarithmes.

Pour cela, on pose

$$x = c + \frac{1}{120\,p^3 z - \beta},$$

et l'on obtient

$$\mathrm{I} = \log(pz - pz_0) + \varepsilon\log(pz - p\varepsilon z_0) + \varepsilon^2\log(pz - p\varepsilon^2 z_0)$$
$$+ \frac{2}{m}\log\prod_{\rho=0}^{\rho=m-1}\left\{[p(z-\rho z_0) - pz_0][p(z-\rho\varepsilon z_0) - p\varepsilon z_0]^{\varepsilon}[p(z-\rho\varepsilon^2 z_0) - p\varepsilon^2 z_0]^{\varepsilon^2}\right\}^{\rho}$$

$$\varepsilon^3 = 1.$$

Exemple : $c = 4b - 3a$. (Dolbnia, *loc. cit.*)

8. Étant donné

$$g_2 = \frac{2(b-a)}{3(c-a)(c-b)}, \qquad g_3 = 0,$$

$$pz_0 = \frac{1}{\sqrt{6(c-b)}}, \qquad \beta = \frac{1}{c-b},$$

si $z_0 = \frac{2\omega}{m}$ est une partie commensurable d'une période, l'intégrale

$$I = \int \frac{(x + H)\,dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^3}}$$

s'exprime par des logarithmes.

Pour cela on pose

$$x = c + \frac{1}{6p^2 z - \beta},$$

et l'on obtient comme résultat définitif

$$I = \log(pz - pz_0) + i\log(pz - pz_0 i)$$
$$+ \frac{2}{m}\log\prod_{\rho=0}^{\rho=m-1}\{[p(z+\rho z_0) - pz_0][p(z+\rho z_0 i) - pz_0 i]^i\}^{\rho-1}.$$

Exemple : $c = 2a - b$.

(Dolbnia, *Bulletin des Sc. math.*, t. XVII, nov. 1893.)

9. Démontrer que

$$\int \frac{k\,\mathrm{cn}\,u\,du}{1 + \mathrm{dn}\,u} = \sqrt{\frac{1 - \mathrm{dn}\,u}{1 + \mathrm{dn}\,u}}.$$

$$\int_0^K \frac{\mathrm{sn}\,u\,du}{\mathrm{dn}\,u + k'} = \frac{1}{k'(1 + k')}.$$

$$\int_0^{2K} u\,\mathrm{sn}^2 u\,du = 2K(K - E)\frac{1}{k^2}.$$

(Greenhill, *Fonctions elliptiques*, p. 94.)

10. Démontrer les formules

$$\begin{cases} \theta(2u) = \dfrac{2\,\theta(u)\,\theta_1(u)\,\theta_2(u)\,\theta_3(u)}{\theta_1(0)\,\theta_2(0)\,\theta_3(0)}, \\[2ex] \theta_1(2u) = \dfrac{\theta_1^2(u)\,\theta_3^2(u) - \theta^2(u)\,\theta_2^2(u)}{\theta_1(0)\,\theta_3^2(0)}, \\[2ex] \theta_2(2u) = \dfrac{\theta_1^2(u) - \theta^2(u)}{\theta_2^2(0)} = \dfrac{\theta_2^2(u) - \theta_3^2(u)}{\theta_2^2(0)}, \\[2ex] \theta_3(2u) = \dfrac{\theta_1^2(u)\,\theta^2(u) + \theta^2(u)\,\theta_2^2(u)}{\theta_4^2(0)\,\theta_3(0)}. \end{cases}$$

(Tannery et Molk.)

11. Démontrer les formules

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{sn} 2u &= \frac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}, \\ \operatorname{cn} 2u &= \frac{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}, \\ \operatorname{dn} 2u &= \frac{\operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}. \end{aligned}\right.$$

12. Établir les formules d'homogénéité suivantes :

$$\sigma(\alpha u;\ \alpha\omega_1, \alpha\omega_2) = \alpha\ \sigma(u;\ \omega_1, \omega_2),$$

$$\zeta(\alpha u;\ \alpha\omega_1, \alpha\omega_2) = \frac{1}{\alpha}\ \zeta(u;\ \omega_1, \omega_2),$$

$$p(\alpha u;\ \alpha\omega_1, \alpha\omega_2) = \frac{1}{\alpha^2}\, p(u;\ \omega_1, \omega_2).$$

13. Les formules (58) et (32) combinées donnent

$$\sigma(u+v)\,\sigma(u-v) = \sigma^2 u\, \sigma_\alpha^2 v - \sigma_\alpha^2 v\, \sigma^2 u,$$

d'où, en changeant u en $u + \omega_\alpha$ ou en $u + \omega_\beta$, deux nouvelles formules. Si, dans la dernière, on remplace u et v par $\frac{u}{2}$, on aura l'équation

$$\sigma_\alpha u = \sigma_\alpha^2 \frac{u}{2}\, \sigma_\beta^2 \frac{u}{2} - (e_\alpha - e_\beta)\, \sigma^2 \frac{u}{2}\, \sigma_\gamma^2 \frac{u}{2}.$$

De même $\sigma_\beta u$: le quotient $\dfrac{\sigma_\alpha u + \sigma_\beta u}{\sigma_\alpha u + \sigma_\gamma u}$ permettra d'obtenir $p\,\dfrac{u}{2}$ en fonction de pu, et en particulier $p\,\dfrac{\omega_\alpha}{2}$. On retrouve ainsi les formules de l'exercice 10, page 70.

14. Déduire de la décomposition en éléments simples les formules suivantes :

$$\sigma\left(u;\ \frac{\omega_1}{2},\ \omega_2\right) = e^{\frac{e_1 u^2}{2}}\, \sigma u\, \sigma_1 u,$$

$$\zeta\left(u;\ \frac{\omega_1}{2},\ \omega_2\right) = e_1 u + \zeta u + \frac{\partial \log \sigma_1 u}{\partial u},$$

$$p\left(u;\ \frac{\omega_1}{2},\ \omega_2\right) = pu + p(u + \omega_1) - e_1.$$

15. Admettant que toute fonction de période $2\omega_1$ peut se mettre sous

la forme

$$A_0 + A_1 e^{\frac{\pi i u}{\omega_1}} + A_2 e^{\frac{2\pi i u}{\omega_1}} + \ldots + A_n e^{\frac{n\pi i u}{\omega_1}} + \ldots,$$

démontrer que toute fonction qui vérifie les relations

$$\begin{cases} \varphi(u + 2\omega_1) = \varphi(u), \\ \varphi(u + 2\omega_2) = e^{-\frac{2\pi i}{\omega_1}(u+\omega_2)} \varphi(u) \end{cases}$$

ne dépend que de deux constantes arbitraires. Prendre comme exemple les carrés des fonctions θ et en déduire les relations (n) du Chapitre II, ainsi que les formules

$$\theta(u+v)\theta(u-v) = \frac{\theta^2(u)\theta_2^2(v) - \theta_2^2(u)\theta^2(v)}{\theta_2^2(0)},$$

$$\theta_2(u+v)\theta_2(u-v) = \frac{\theta_2^2(u)\theta_2^2(v) - \theta^2(u)\theta^2(v)}{\theta_2^2(0)},$$

et celles de l'exercice 10.

16. Démontrer que, si $\omega_2 = i\omega_1$ et si le discriminant est positif, on a

$$\eta_1 \omega_1 = \frac{\pi}{4}.$$

(HALPHEN, *Fonctions elliptiques*, t. I, p. 281.)

17. Montrer que, dans le cas du discriminant positif, $\theta(u)$ varie comme $\sin\frac{\pi u}{2\omega_1}$, $\theta_1(u)$ comme $\cos\frac{\pi u}{2\omega_1}$, $\theta_2(u)$ et $\theta_3(u)$ comme $1 \pm 2q\cos\frac{\pi u}{\omega_1}$, q étant supposé compris entre zéro et $\frac{1}{2}$. (HALPHEN, p. 285.)

18. On pose

$$Zu = \frac{\theta_2'\left(\frac{u}{\sqrt{e_1 - e_2}}\right)}{\theta_2\left(\frac{u}{\sqrt{e_1 - e_2}}\right)}.$$

Démontrer que

$$Z(u + 2K) = Zu,$$

$$Z(u + 2iK') = Zu + \frac{\pi i}{K},$$

$$Z(0) = 0, \qquad Z(K) = 0, \qquad Z(iK') = \infty.$$

19. Étude des cubiques planes. On commence par démontrer qu'avec des axes convenables et par une transformation homographique appro-

priée, on peut toujours mettre l'équation d'une cubique sans point double sous la forme

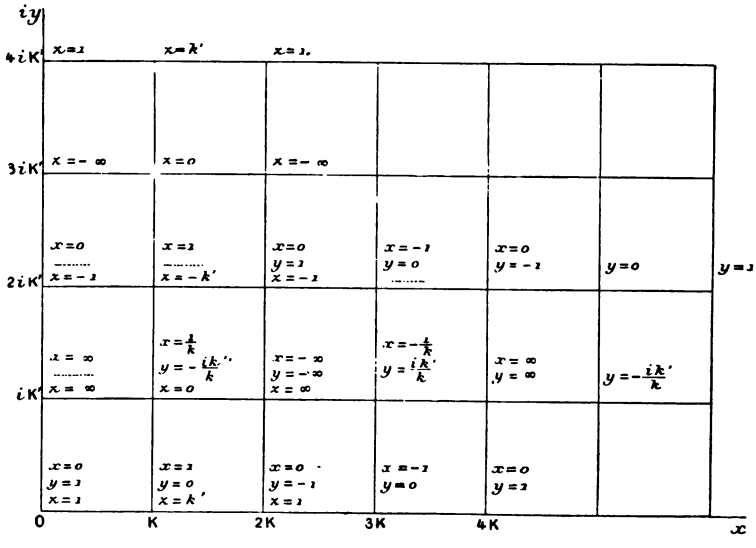
$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3.$$

Il suffit alors de poser

$$x = pu, \qquad y = p'u,$$

pour avoir exprimé les coordonnées d'un point de la cubique en fonctions elliptiques d'un paramètre. Les propriétés relatives aux points d'intersection avec une droite, aux points d'inflexion, aux points de contact des tangentes issues d'un point de la cubique, aux points sextactiques, etc. en résultent immédiatement.

QUELQUES VALEURS DES FONCTIONS DE JACOBI.



$$x = \mathrm{sn}\,(u, k),$$
$$y = \mathrm{cn}\,(u, k),$$
$$z = \mathrm{dn}\,(u, k).$$

RÉSUMÉ DES PRINCIPALES FORMULES.

Dans ce résumé, nous avons groupé des formules disséminées dans le cours du Précis; la page indiquée est celle où la formule se rencontre pour la première fois; pour les formules qui ne sont pas relevées dans ce Résumé, leur numéro d'ordre permettra toujours de les retrouver aisément, soit en se reportant à la Table des matières, soit à l'aide d'un numéro voisin lu dans le Résumé.

Des fonctions θ.

(1) $$\left\{\begin{aligned}\theta(u) &= -i\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi i u}{\omega_1}} \\ &= 2\sum_{0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi u}{\omega_1}\end{aligned}\right\}$$ ..... Pages 13

(6) $$\theta'(0) = \frac{\pi}{\omega_1}\left(q^{\frac{1}{4}} - 3q^{\frac{9}{4}} + 5q^{\frac{25}{4}} + \ldots\right)$$ 14

(11) $$\theta_1(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi u}{\omega_1}}$$ 17

$$= 2\sum_{0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi u}{\omega_1}$$ 18

(12) $$\theta_2(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{\frac{n\pi i u}{\omega_1}}$$ 18

$$= 1 + 2\sum_{1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos\frac{n\pi u}{\omega_1}$$ 18

Pages

(13)
$$\theta_3(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{\frac{n\pi i u}{\omega_1}} \quad \ldots\ldots \quad 18$$
$$= 1 + 2\sum_{1}^{\infty} q^{n^2} \cos\frac{n\pi u}{\omega_1} \quad \ldots\ldots \quad 18$$

(14)
$$\left\{\begin{aligned} \theta(-u) &= -\theta\, u \\ \theta_1(-u) &= \theta_1 u \\ \theta_2(-u) &= \theta_2 u \\ \theta_3(-u) &= \theta_3 u \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 18$$

(15)
$$\left\{\begin{aligned} \theta(u+2\omega_1) &= -\theta\, u \quad \ldots\ldots \quad 13 \\ \theta_1(u+2\omega_1) &= -\theta_1 u \quad \ldots\ldots \quad 19 \\ \theta_2(u+2\omega_1) &= \theta_2 u \quad \ldots\ldots \quad 19 \\ \theta_3(u+2\omega_1) &= \theta_3 u \quad \ldots\ldots \quad 19 \end{aligned}\right.$$

(16)
$$\left\{\begin{aligned} \theta(u+2\omega_2) &= -e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}(u+\omega_2)}\theta\, u \quad \ldots\ldots \quad 13 \\ \theta_1(u+2\omega_2) &= e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}(u+\omega_2)}\theta_1 u \quad \ldots\ldots \quad 19 \\ \theta_2(u+2\omega_2) &= -e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}(u+\omega_2)}\theta_2 u \quad \ldots\ldots \quad 19 \\ \theta_3(u+2\omega_2) &= e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}(u+\omega_2)}\theta_3 u \quad \ldots\ldots \quad 19 \end{aligned}\right.$$

(17)
$$\left\{\begin{aligned} \theta(u+\omega_1) &= \theta_1 u \\ \theta_1(u+\omega_1) &= -\theta\, u \\ \theta_2(u+\omega_1) &= \theta_3 u \\ \theta_3(u+\omega_1) &= \theta_2 u \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 19$$

(18)
$$\left\{\begin{aligned} \theta(u+\omega_2) &= iq^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi i u}{2\omega_1}}\theta_2 u \\ \theta_1(u+\omega_2) &= q^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi i u}{2\omega_1}}\theta_3 u \\ \theta_2(u+\omega_2) &= iq^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi i u}{2\omega_1}}\theta\, u \\ \theta_3(u+\omega_2) &= q^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi i u}{2\omega_1}}\theta_1 u \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 19$$

$$q = e^{\frac{\pi i \omega_2}{\omega_1}}.$$

Zéros de $\theta_\alpha u$ et de $\sigma_\alpha u$.

			Pages
(19) et (20)	$\theta\, u,\ \sigma\, u$.....	$2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$.....	14 et 29
	$\theta_1 u,\ \sigma_1 u$.....	$(2m_1+1)\omega_1 + 2m_2\omega_2$.....	20 et 29
	$\theta_2 u,\ \sigma_2 u$.....	$2m_1\omega_1 + (2m_2+1)\omega_2$..	20 et 29
	$\theta_3 u,\ \sigma_3 u$.....	$(2m_1+1)\omega_1 + (2m_2+1)\omega_2$..	20 et 29

Les formules de duplication se trouvent page 209.

Relations algébriques.

(m)	$\sqrt{k} = \dfrac{\theta_1(0)}{\theta_3(0)}, \qquad \sqrt{k'} = \dfrac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)}$.....	22
(n)	$\left\{\begin{array}{l} \theta^2 u = k\theta_2^2 u - k'\theta_1^2 u \\ \theta_1^2 u = k\theta_3^2 u - k'\theta^2 u \\ \theta_2^2 u = k\theta^2 u + k'\theta_3^2 u \end{array}\right\}$.....	22
(o)	$\theta_3^4(0) = \theta_1^4(0) + \theta_2^4(0)$.....	23
(s) [1]	$\theta'(0) = \dfrac{\pi}{2\omega_1}\theta_1(0)\theta_2(0)\theta_3(0)$.....	24

Développements en produits.

(p) et (q)	$\theta\, u = 2A \sin\dfrac{\pi u}{2\omega_1}\prod_1^\infty\left(1 - 2q^{2m}\cos\dfrac{\pi u}{\omega_1} + q^{4m}\right)$.....	23
	$\theta_1 u = 2A\cos\dfrac{\pi u}{2\omega_1}\prod_1^\infty\left(1 - 2q^{2m-1}\cos\dfrac{\pi u}{\omega_1} + q^{4m-2}\right)$..	23
	$\theta_2 u = A\prod_1^\infty\left(1 - 2q^{2m-1}\cos\dfrac{\pi u}{\omega_1} + q^{4m-2}\right)$.....	23
	$\theta_3 u = A\prod_1^\infty\left(1 + 2q^{2m-1}\cos\dfrac{\pi u}{\omega_1} + q^{4m-2}\right)$.....	23

$$A = \prod_1^\infty (1 - q^{2m})^2.$$

---

[1] C'est par erreur que la formule est numérotée (1) dans le texte.

Des fonctions σu et $\sigma_\alpha u$ [*voir* aussi formule (20)].

		Pages
(21)	$\sigma(-u) = -\sigma u$	29
	$\sigma_\alpha(-u) = \sigma_\alpha u \quad (\alpha = 1, 2, 3)$	29
(22)	$\sigma u = e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2}\dfrac{\theta u}{\theta' 0}$	29
	$\sigma_\alpha u = e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2}\dfrac{\theta_\alpha u}{\theta_\alpha 0}$	29
(23)	$\eta_1 = -\dfrac{\omega_1}{3}\dfrac{\theta'''(0)}{\theta'(0)}$	30
(24)	$\sigma(u+2\omega_1) = -e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\sigma u$	30
	$\sigma_1(u+2\omega_1) = -e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\sigma_1 u$	
	$\sigma_2(u+2\omega_1) = e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\sigma_2 u$	
	$\sigma_3(u+2\omega_1) = e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\sigma_3 u$	
(25)	$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \dfrac{\pi i}{2}$	31
(26)	$\sigma(u+2\omega_2) = -e^{2\eta_2(u+\omega_2)}\sigma u$	31
	$\sigma_1(u+2\omega_2) = e^{2\eta_2(u+\omega_2)}\sigma_1 u$	
	$\sigma_2(u+2\omega_2) = -e^{2\eta_2(u+\omega_2)}\sigma_2 u$	
	$\sigma_3(u+2\omega_2) = e^{2\eta_2(u+\omega_2)}\sigma_3 u$	
(29)	$\sigma(u+2\omega_i) = -e^{2\eta_i(u+\omega_i)}\sigma u \quad (i = 1, 2, 3)$	33
	$\sigma_\alpha(u+2\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma_\alpha u \quad (\alpha = 1, 2, 3)$	33
	$\sigma_\alpha(u+2\omega_\beta) = e^{2\eta_\beta(u+\omega_\beta)}\sigma_\alpha u \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, \alpha \gtrless \beta)$.	33
	$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$.	
(30)	$\sigma(u+\omega_\alpha) = e^{\eta_\alpha u}\sigma\omega_\alpha\,\sigma_\alpha u \quad (\alpha = 1, 2, 3)$	33

Des fonctions ζu et pu.

(33)	$\zeta u = \dfrac{\sigma' u}{\sigma u} = \mathrm{D}\log\sigma u$	36
(35)	$\zeta(u+2\omega_i) = \zeta u + 2\eta_i$	36

Pages

(37) $\zeta(-u) = -\zeta u$ 36

(41) $pu = -\zeta' u = -D_2 \log \sigma u$ 39

(42) $p(u + 2\omega_i) = -\zeta'(u + 2\omega_i) = -\zeta' u = pu$ 39

Développements en séries.

σu (1) $= u - \frac{1}{12} c_2 u^5 - \frac{1}{30} c_4 u^7 - \ldots$ 29

(38) ζu (1) $= \frac{1}{u} - \frac{1}{3} c_2 u^3 - \frac{1}{5} c_4 u^5 - \ldots$ 36

(43) $pu = \frac{1}{u^2} + c_2 u^2 + c_4 u^4 + \ldots$ 40

$c_2 = \frac{1}{20} g_2$ (2), $c_4 = \frac{1}{28} g_3$ 46

Formules d'addition.

(32) $\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma^2 u \sigma^2 v} = D_2 \log \sigma u - D_2 \log \sigma v = pv - pu.$ 35

(39) $\zeta(u-v) + \zeta(u+v) - 2\zeta u = \frac{\zeta'' u}{\zeta' u - \zeta' v} = \frac{p' u}{pu - pv}.$ 37, 41

(40) $\left\{ \begin{aligned} \zeta(u+v) &= \zeta u + \zeta v + \frac{1}{2} \frac{\zeta'' u - \zeta'' v}{\zeta' u - \zeta' v} \\ &= \zeta u + \zeta v + \frac{1}{2} \frac{p' u - p' v}{pu - pv} \end{aligned} \right\}$ 73, 41

(54) $p(u+v) = pu - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \frac{p' u - p' v}{pu - pv}$ 44

(57) $p(u+v) + pu + pv = \frac{1}{4} \left(\frac{p' u - p' v}{pu - pv} \right)^2$ 49

Homogénéité.

(67) $p(u; g_2, g_3) = \mu p \left(u\sqrt{\mu}; \frac{g_2}{\mu^2}, \frac{g_3}{\mu^3} \right)$ 60

---

(1) Les notations du texte ont été modifiées pour faire concorder les trois formules.

(2) *Voir* l'errata.

Pages

(76) $\zeta(u; g_2, g_3) = \sqrt{\mu}\,\zeta\left(u\sqrt{\mu}; \frac{g_2}{\mu^2}, \frac{g_3}{\mu^3}\right)$ 89

$$\sigma(u; g_2, g_3) = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\,\sigma\left(u\sqrt{\mu}; \frac{g_2}{\mu^2}, \frac{g_3}{\mu^3}\right).$$

(*Voir* aussi page 210, Exercice 12.)

Les fonctions de Jacobi.

(45)
$$\lambda = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \theta_3^4(0) \quad \ldots\ldots \quad 42$$
$$g = \sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2\omega_1}\theta_3^2(0) \quad \ldots\ldots \quad 42$$

(46)
$$\operatorname{sn} u = g\,\frac{\theta\left(\frac{u}{g}\right)}{\theta_2\left(\frac{u}{g}\right)}\,\frac{\theta_2(0)}{\theta'(0)} \quad \ldots\ldots \quad 42$$
$$\operatorname{cn} u = \frac{\theta_1\left(\frac{u}{g}\right)}{\theta_2\left(\frac{u}{g}\right)}\,\frac{\theta_2(0)}{\theta_1(0)} \quad \ldots\ldots \quad 42$$
$$\operatorname{dn} u = \frac{\theta_3\left(\frac{u}{g}\right)}{\theta_2\left(\frac{u}{g}\right)}\,\frac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)} \quad \ldots\ldots \quad 42$$

(47) $\operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{cn}(-u) = \operatorname{cn} u, \quad \operatorname{dn}(-u) = \operatorname{dn} u$ .. 43

(49)
$$\operatorname{sn}(u + 2K) = -\operatorname{sn} u \quad \ldots\ldots \quad 43$$
$$\operatorname{cn}(u + 2K) = -\operatorname{cn} u \quad \ldots\ldots \quad 43$$
$$\operatorname{dn}(u + 2K) = \operatorname{dn} u \quad \ldots\ldots \quad 43$$

(50)
$$\operatorname{sn}(u + 2iK') = \operatorname{sn} u \quad \ldots\ldots \quad 43$$
$$\operatorname{cn}(u + 2iK') = -\operatorname{cn} u \quad \ldots\ldots \quad 43$$
$$\operatorname{dn}(u + 2iK) = -\operatorname{dn} u \quad \ldots\ldots \quad 43$$

(51)
Périodes de $\operatorname{sn} u$.... $4K$ et $2iK'$ 43
» $\operatorname{cn} u$.... $4K$ et $2K + 2iK'$ 43
» $\operatorname{dn} u$.... $2K$ et $4iK'$ 43

Pages

(52) Pôles des trois fonctions.. $2mK + (2m'+1)iK'$..... 43
Zéros de $\operatorname{sn} u$..... $2mK + 2m'iK'$..... 43
Zéros de $\operatorname{cn} u$..... $(2m+1)K + 2m'iK'$..... 43
Zéros de $\operatorname{dn} u$..... $(2m+1)K + (2m'+1)iK'$. 43

(53) $\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1$..... 44
$k^2 \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{dn}^2 u = 1$..... 44

Formules d'addition..... 68

Formules de multiplication..... 68

(*Voir* aussi pages 69, 70, 128 et 210.)

Relations différentielles; relations diverses.

(55) $p'^2 u = 4p^3 u - g_2 p u - g_3$..... 46

(55 *bis*) $p'^2 u = 4(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3)$..... 46

(56) $e_1 = p\omega_1, \quad e_2 = p\omega_2, \quad e_3 = p\omega_3$..... 46
$e_i = p\omega_j \quad (i, j = 1, 2, 3)$..... 46

(58) $\sqrt{pu - e_\alpha} = \dfrac{e^{-\eta_\alpha u}\,\sigma(u+\omega_\alpha)}{\sigma u\,\sigma\omega_\alpha} = \dfrac{\sigma_\alpha u}{\sigma u} = \dfrac{\theta_\alpha u}{\theta u}\,\dfrac{\theta'(0)}{\theta_\alpha(0)}$... 50

(59) $(pu - e_\alpha)[p(u+\omega_\alpha) - e_\alpha] = (e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)$... 51

(63) $\operatorname{sn} u = \dfrac{\sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{p\dfrac{u}{\sqrt{e_1 - e_2}} - e_2}}$..... 55

(64) $\operatorname{sn}'^2 u = (1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u)$..... 56

(65) $\dfrac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial u} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$..... 56
$\dfrac{\partial \operatorname{cn} u}{\partial u} = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u$..... 56
$\dfrac{\partial \operatorname{dn} u}{\partial u} = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u$..... 56

Valeur des constantes de Jacobi, Legendre.

Pages

(62) $$\left\{\begin{array}{l} k^2 = \dfrac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2}, \qquad k'^2 = \dfrac{e_1 - e_3}{e_1 - e_2} \\ k^2 + k'^2 = 1. \end{array}\right.$$ 55

(68) et (70) $$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{K} = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\ = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}} \\ \sin\theta = k. \end{array}\right.$$ ..... 66 et 84

(69) et (71) $$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{K}' = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}} \\ = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}} \end{array}\right.$$ ..... 67 et 71

(72) $$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{E} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \int_0^1 \frac{dx\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \\ \mathrm{E}' = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi} = \int_0^1 \frac{dx\sqrt{1-k'^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}\right.$$ 72 72

(73) $$\mathrm{KE}' + \mathrm{K}'\mathrm{E} - \mathrm{KK}' = \frac{\pi}{2}$$ 72

Constantes de Weierstrass et calcul des fonctions (discriminant positif).

$$\lambda = e_1 - e_2.$$

$$pu = e_2 + \frac{\lambda}{\mathrm{sn}^2 u\sqrt{\lambda}}.$$

(83) $$\sqrt{\lambda}\,\mathrm{E}(\varphi) = e_1 u + \zeta u + \frac{1}{2}\frac{p'u}{pu - e_2}$$ 102

Pages

(48) $\omega_1\sqrt{\lambda} = K = \frac{\pi}{2}\theta_3^2(0)$ 43

$\omega_2\sqrt{\lambda} = iK' = \frac{\pi}{2}\frac{\omega_2}{\omega_1}\theta_3^2(0)$ 43

(75) $\eta_1 = \sqrt{\lambda}\,E - \frac{Ke_1}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{e_1 - e_2}\left(E - \frac{e_1 K}{e_1 - e_2}\right)$ 88

(77) $\eta_2 = -i\sqrt{e_1 - e_2}\left(E' + \frac{e_2 K'}{e_1 - e_2}\right)$ 89

Constantes et fonctions de Weierstrass (discriminant négatif).

(78) $\omega_1 = \frac{K_1}{\sqrt{H}}, \quad H = \sqrt{2e_1^2 + \frac{g_3}{4e_1}}$ 91

$\omega_2 = \frac{iK'_1}{\sqrt{H}}, \quad k_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{3e_1}{4H}$ 91

(79) $p\omega_1 = p\omega_2 = e_1$ 92

(80) $pu = e_1 + H\frac{1 + \operatorname{cn} 2u\sqrt{H}}{1 - \operatorname{cn} 2u\sqrt{H}}$ 94

(81) $\eta_2 = i\sqrt{H}(K'_1 - 2E'_1)$ 99

(82) $\eta_1 = (K_1 - 2E_1)\sqrt{H}$ 99

(u) $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \pi$ 99

(84) $\zeta(u + \omega_1) - \eta_1 = -uH + 2\sqrt{H}\,E(\varphi, k'_1) + \frac{p'_\alpha u}{2p_\alpha u - e_1}$. 104

$\sin\varphi = \operatorname{sn}(u, k'_1)$.

$p_\alpha u$ correspond au module k'_1 et au multiplicateur H [1].

---

[1] Dans le texte, l'accent a été omis sur la lettre k'_1 aux pages 103 et 104.

Comparaison des principales notations du Précis avec celles de quelques Ouvrages.
(Discriminant positif.)

JORDAN, *Précis.*	SCHWARZ, HALPHEN.	TANNERY et MOLK.	BRIOT et BOUQUET.	LEGENDRE, JACOBI, HERMITE (1).
ω_1	ω ou ω_1	ω_1 Dans le cas où une période est réelle et une autre purement imaginaire.	$\frac{\omega}{2}$	$\frac{K}{\sqrt{e_1-e_2}}$
ω_2	ω' ou ω_3	ω_3	$\frac{\omega'}{2}$	$\frac{K'i}{\sqrt{e_1-e_2}}$
ω_3	$\left.\begin{matrix}-\omega'' \\ \text{ou } -\omega_2\end{matrix}\right\} = -(\omega+\omega')$	ω_2		
$\theta\, u$	$\vartheta_1 v \quad v = \frac{u}{2\omega_1}$	$\vartheta_1 v \quad v = \frac{u}{2\omega_1}$	$\theta_1(u) \quad v = \frac{u}{2\omega_1}$	$H\,(u\sqrt{e_1-e_2})$
$\theta_1 u$	$\vartheta_2 v$	$\vartheta_2 v$	$\theta_2(u)$	$H_1(u\sqrt{e_1-e_2})$
$\theta_2 u$	$\vartheta_0 v$	$\vartheta_4 v$	$\theta\,(u)$	$\Theta\,(u\sqrt{e_1-e_2})$
$\theta_3 u$	$\vartheta_3 v$	$\vartheta_3 v$	$\theta_3(u)$	$\Theta_1(u\sqrt{e_1-e_2})$
$\frac{\theta'_2(u)}{\theta_2(u)} = \zeta(u+\omega_2) - \frac{\eta_1}{\omega_1}u - \eta_2$	.....	.....	.....	$\sqrt{e_1-e_2}\,Z(u\sqrt{e_1-e_2})$ (2)

$\dfrac{\eta_1 + e_1\omega_1}{\sqrt{e_1 - e_2}}$	.....	.....	.....	$E = K - J$
$\dfrac{i(\eta_2 + e_2\omega_2)}{\sqrt{e_1 - e_2}}$	.....	.....	.....	$E' = J'$
$\operatorname{sn}(u\sqrt{e_1 - e_2})$	Mêmes notations	Mêmes notations	$\lambda(u)$	$\operatorname{sn} u$
$\operatorname{cn}(u\sqrt{e_1 - e_2})$	Id.	Id.	$\mu(u)$	$\operatorname{cn} u$
$\operatorname{dn}(u\sqrt{e_1 - e_2})$	Id.	Id.	$\nu(u)$	$\operatorname{dn} u$

(1) En réalité, il y a une importante différence entre les notations de Jacobi et celles qu'emploie généralement M. Hermite. Dans les premières, K et K′ sont fonctions l'une de l'autre (page 43); pour M. Hermite, elles sont indépendantes. En voici les principales conséquences : le facteur $\sqrt{e_1 - e_2}$ n'a plus de raison d'être, K peut être pris égal à ω_1, iK' à ω_2; on désignera par $H(u)$ la série que nous avons appelée $\theta(u)$, et, si l'on pose

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{H(u)}{\Theta u} = \frac{\theta_3(0)}{\theta_1(0)}\,\frac{\theta(u)}{\theta_2(u)} = g\,\frac{\theta_2(0)}{\theta'(0)}\,\frac{\theta u}{\theta_2 u}, \qquad \text{avec} \qquad g = \frac{\pi}{2K}\,\theta_3^2(0) = \sqrt{e_1 - e_2},$$

la limite de $\dfrac{\operatorname{sn} u}{u}$ pour $u = 0$ sera g et l'équation différentielle de $\operatorname{sn} u$ sera

$$\frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial u} = g \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u.$$

On retrouvera le cas particulier des notations de Jacobi en faisant $g = 1$.

(2) La fonction appelée $Z(x)$ par M. Hermite est celle de Jacobi changée de signe et augmentée de $\dfrac{J}{K}x$, de sorte que, pour M. Hermite, on a

$$Z(x + 2K) = Z(x) + 2J,$$
$$Z(x + 2iK') = Z(x) + 2iJ',$$

au lieu des propriétés que nous avons indiquées (page 211, Exercice 17).

TABLES.

NOTE SUR LA CONSTRUCTION DES TABLES.

La Table I a été calculée par M. G. Humbert pour les valeurs de K; les intervalles ont été choisis de manière que, en interpolant par parties proportionnelles, on obtienne des nombres aussi exacts que ceux de la Table. J'ai ajouté les valeurs de l'intégrale complète de deuxième espèce E, en conservant les mêmes intervalles, autant pour ne pas compliquer la disposition des Tables que parce que l'approximation obtenue par une interpolation est au moins égale à celle obtenue par une interpolation est au moins égale à celle obtenue dans le premier cas.

La Table II, extraite par M. G. Humbert des Tables de Legendre à dix décimales, fournit $\operatorname{sn} u$ ou pu lorsqu'on se donne l'angle modulaire $\theta = \arcsin k$ et l'argument $\varphi = \arcsin \operatorname{sn} u$; elle permet aussi de résoudre le problème inverse. Nous avons donné au Chapitre VI toutes les indications pour pouvoir utiliser cette Table, ainsi que la suivante, aussi bien dans le cas où e_1, e_2, e_3 sont réelles que dans l'autre cas.

J'ai extrait la Table III des Tables de Legendre à dix décimales; la Table IV est empruntée au *Traité de Calcul intégral* de M. Bertrand.

θ	K	E	θ	K	E	θ	K	E	θ	K	E
0°	1,57080	1,57080	40°	1,78677	1,39314	70°. 0′	2,50455	1,11838	84°. 0′	3,65186	1,01724
1	092	068	41	9922	38489	30	2729	11399	12	8525	628
2	127	032	42	1,81216	37650	71. 0	5073	10964	24	3,71984	534
3	187	1,56972	43	2560	36800	30	7490	10533	36	5572	443
4	271	888	44	3957	35938	72. 0	9982	106	48	9298	354
5	379	781	45	5407	35064	30	2,62555	09683	85. 0	3,83174	266
6	511	650	46	6915	34181	73. 0	5214	265	12	7211	181
7	668	495	47	8481	33287	30	7962	8851	24	3,91423	099
8	849	296	48	1,90108	32384	74. 0	2,70807	443	36	5827	018
9	1,58054	114	49	1800	31473	30	3752	039	48	4,00437	0940
10	284	1,55889	50	3558	30554	75. 0	6806	7641	86. 0	5276	865
11	539	640	51	5386	29628	30	9975	248	12	4,10366	792
12	820	368	52	7288	28695	76. 0	2,83267	6861	24	5736	721
13	1,59125	073	53	9267	27757	30	6691	480	36	4,21416	653
14	457	1,54755	54	2,01327	26815	77. 0	2,90256	106	48	7444	588
15	814	415	55	3472	25868	30	3974	5738	87. 0	4,33865	526
16	1,60198	052	56	5706	24918	78. 0	7857	378	12	40733	466
17	608	1,53667	57	8036	23966	30	3,01918	024	24	8115	410
18	1,61045	260	58	2,10466	23013	79. 0	6173	4679	36	56190	356
19	510	1,52831	59	3002	22059	30	3,10640	4341	48	64765	306
20	1,62003	380	60	2,15652	21106	80. 0	5339	011	88, 0	74272	258
21	523	1,51908	61	8421	0154	12	7288	3882	12	84785	215
22	1,63073	415	62	2,21319	19205	24	9280	754	24	96542	174
23	632	1,50901	63	4355	18259	36	3,21317	628	36	5,09876	137
24	1,64260	366	64	7538	17318	48	3400	503	48	25274	104
25	900	1,49811	65	2,30879	16383	81. 0	5530	379	89. 0	43491	075
26	1,65570	237	66	4390	15455	12	7711	257	6	54020	062
27	6272	1,48643	67	8087	14535	24	9945	126	12	65792	050
28	7006	029	63	2,41984	13624	36	3,32234	017	18	79140	049
29	7773	1,47397	69	6100	12725	48	4580	2900	24	94550	030
30	1,68575	1,46746	70	2,50455	11838	82. 0	6987	784	30	6,12778	021
31	9411	077				12	9457	670	36	35038	014
32	1,70284	1,45391				24	3,41994	558	42	63854	008
33	1192	44687				36	4601	447	48	7,04398	004
34	2139	43966				48	7282	338	54	73711	001
35	3125	229				83. 0	3,50042	231	90	∞	000
36	4150	42476				12	2884	126			
37	5217	41707				24	5814	023			
38	6326	40924				36	8837	1921			
39	7479	126				48	3,61959	821			

φ	θ									
	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	4
1°	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,0
2	03491	03491	03491	03491	03491	03491	03491	03491	03491	0
3	05236	05236	05236	05236	05236	05236	05237	05237	05237	0
4	06981	06981	06981	06982	06982	06982	06983	06983	06984	0
5	08727	08727	08727	08727	08728	08729	08729	08730	08731	0
6	10472	10472	10473	10473	10474	10475	10477	10478	10480	1
7	12217	12218	12218	12219	12221	12223	12225	12227	12230	12
8	13963	13963	13964	13966	13968	13971	13974	13978	13981	13
9	15708	15708	15710	15712	15715	15719	15724	15729	15735	15
10	17453	17454	17456	17459	17464	17469	17475	17482	17490	17
11	19199	19200	19202	19206	19212	19220	19228	19237	19247	19
12	20944	20945	20949	20954	20962	20971	20982	20994	21007	21
13	22689	22691	22695	22702	22712	22724	22738	22753	22770	22
14	24435	24436	24442	24451	24463	24478	24495	24514	24535	24
15	26180	26182	26189	26200	26215	26233	26254	26278	26303	26
16	27925	27928	27936	27949	27967	27989	28015	28044	28075	28
17	29671	29674	29684	29699	29721	29748	29779	29813	29850	29
18	31416	31420	31431	31450	31475	31507	31544	31585	31629	31
19	33161	33166	33179	33201	33231	33268	33312	33360	33412	33
20	34907	34912	34927	34953	34988	35031	35082	35138	35199	35
21	36652	36658	36676	36706	36746	36796	36855	36920	36990	37
22	38397	38404	38425	38459	38505	38563	38630	38705	38786	38
23	40143	40151	40174	40213	40266	40331	40408	40494	40587	40
24	41888	41897	41924	41968	42027	42102	42189	42287	42392	42
25	43633	43643	43674	43723	43791	43875	43973	44084	44203	443
26	45379	45390	45424	45479	45555	45650	45761	45885	46020	46
27	47124	47137	47174	47236	47321	47427	47551	47690	47841	48
28	48869	48883	48925	48994	49089	49207	49345	49500	49669	49
29	50615	50630	50677	50753	50858	50988	51142	51315	51503	51
30	52360	52377	52428	52513	52628	52773	52943	53134	53343	535
31	54105	54124	54181	54273	54401	54560	54747	54959	55189	554
32	55851	55871	55933	56035	56175	56349	56555	56788	57042	573
33	57596	57619	57686	57797	57950	58141	58367	58623	58902	59
34	59341	59366	59439	59561	59727	59936	60183	60463	60769	610
35	61087	61113	61193	61325	61506	61734	62003	62308	62643	629
36	62832	62861	62948	63090	63287	63534	63827	64159	64524	649
37	64577	64609	64702	64857	65070	65337	65655	66016	66413	668
38	66323	66356	66457	66624	66854	67144	67487	67879	68309	687
39	68068	68104	68213	68393	68641	68953	69324	69747	70214	707
40	69813	69852	69969	70162	70429	70765	71165	71622	72126	726
41	71558	71600	71726	71933	72219	72580	73010	73502	74047	746
42	73304	73349	73483	73704	74011	74398	74860	75389	75976	766
43	75049	75097	75240	75477	75805	76219	76714	77282	77914	785
44	76794	76846	76998	77251	77600	78043	78573	79182	79860	805
45	0,78540	0,78594	0,78756	0,79025	0,79398	0,79871	0,80437	0,81088	0,81815	0,826

φ	θ								
	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
1	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2	03491	03491	03491	03491	03491	03491	03491	03491	03491
3	05237	05238	05238	05238	05238	05238	05238	05238	05238
4	06985	06985	06986	06986	06986	06987	06987	06987	06987
5	08733	08734	08735	08736	08736	08737	08737	08738	08738
6	10483	10485	10486	10488	10489	10490	10491	10491	10491
7	12235	12238	12240	12242	12244	12246	12247	12248	12248
8	13989	13993	13997	14000	14003	14005	14007	14008	14008
9	15746	15751	15757	15761	15765	15769	15771	15772	15773
10	17505	17513	17520	17526	17532	17536	17540	17542	17543
11	19268	19278	19288	19296	19304	19310	19314	19317	19318
12	21034	21047	21059	21071	21080	21088	21094	21098	21099
13	22804	22821	22836	22851	22863	22873	22880	22885	22886
14	24578	24599	24618	24636	24652	24664	24674	24680	24681
15	26356	26382	26406	26428	26448	26463	26475	26482	26484
16	28139	28171	28200	28227	28251	28270	28284	28293	28295
17	29927	29965	30001	30034	30062	30085	30102	30112	30116
18	31721	31766	31809	31848	31881	31909	31929	31942	31946
19	33520	33574	33624	33670	33710	33742	33766	33781	33786
20	35326	35388	35447	35501	35548	35586	35615	35632	35638
21	37137	37210	37279	37342	37396	37441	37474	37494	37501
22	38956	39040	39119	39192	39255	39307	39346	39369	39377
23	40782	40878	40969	41053	41126	41186	41230	41257	41266
24	42614	42724	42829	42925	43008	43077	43128	43159	43169
25	44455	44580	44699	44808	44904	44982	45040	45075	45088
26	46304	46445	46580	46704	46812	46901	46967	47008	47021
27	48161	48320	48472	48612	48735	48835	48910	48956	48972
28	50027	50206	50377	50534	50672	50785	50870	50922	50939
29	51902	52102	52293	52470	52624	52752	52847	52905	52925
30	53787	54009	54223	54420	54593	54736	54843	54908	54931
31	55681	55928	56166	56386	56579	56739	56858	56931	55956
32	57586	57860	58123	58367	58582	58760	58893	58975	59003
33	59501	59803	60095	60365	60604	60802	60950	61042	61073
34	61427	61760	62082	62381	62646	62865	63029	63131	63166
35	63364	63730	64085	64415	64707	64950	65132	65245	65284
36	65313	65715	66104	66468	66790	67058	67260	67385	67428
37	67273	67713	68141	68540	68895	69131	69414	69552	69599
38	69246	69727	70195	70633	71023	71349	71594	71747	71799
39	71232	71756	72267	72746	73175	73533	73804	73972	74029
40	73231	73801	74358	74882	75352	75745	76043	76228	76291
41	75243	75862	76469	77041	77555	77987	78313	78517	78586
42	77269	77940	78600	79224	79786	80258	80617	80841	80917
43	79308	80035	80752	81432	82045	82562	82954	83200	83284
44	81362	82149	82926	83665	84333	84898	85329	85598	85690
45	0,83431	0,84281	0,85122	0,85925	0,86653	0,87270	0,87741	0,88037	0,88137

φ	θ									
	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
46°	0,80285	0,80343	0,80515	0,80801	0,81198	0,81701	0,82305	0,83001	0,83779	0,84623
47	82030	82092	82275	82578	82999	83535	84178	84920	85752	86656
48	83776	83841	84035	84356	84803	85371	86055	86846	87734	88701
49	85521	85590	85795	86135	86609	87211	87937	88779	89725	90759
50	87266	87339	87556	87915	88416	89054	89825	90719	91725	92829
51	89012	89088	89317	89697	90226	90901	91716	92665	93735	94912
52	90757	90838	91078	91479	92037	92750	93613	94618	95755	97007
53	92502	92587	92841	93262	93850	94603	95514	96578	97784	0,99115
54	94248	94337	94603	95047	95666	96458	97420	0,98545	0,99822	1,01237
55	95993	96086	96366	96832	97483	0,98317	0,99331	1,00519	1,01871	03371
56	97738	97836	98130	0,98618	0,99302	1,00179	1,01247	02499	03928	05519
57	0,99484	0,99586	0,99894	1,00406	1,01123	02044	03167	04487	05996	07680
58	1,01229	1,01336	1,01658	02194	02946	03912	05092	06481	08073	09854
59	02974	03086	03423	03984	04770	05783	07021	08482	10159	12042
60	04720	04837	05188	05774	06597	07657	08955	10490	12256	14243
61	06465	06587	06954	07566	08425	09534	10894	12504	14361	16457
62	08210	08338	08720	09358	10255	11414	12837	14525	16476	18685
63	09956	10088	10486	11151	12087	13296	14784	16552	18601	20926
64	11701	11839	12253	12945	13920	15182	16735	18586	20735	23180
65	13446	13590	14020	14740	15755	17070	18691	20626	22877	25447
66	15192	15340	15787	16536	17592	18961	20651	22672	25029	27727
67	16937	17091	17555	18333	19430	20854	22615	24724	27190	30020
68	18682	18842	19324	20130	21269	22750	24583	26782	29359	32325
69	20428	20593	21092	21928	23110	24648	26555	28846	31537	34642
70	22173	22345	22861	23727	24953	26548	28530	30915	33723	36972
71	23918	24096	24630	25527	26796	28451	30509	32990	35917	39313
72	25664	25847	26400	27328	28641	30356	32491	35070	38118	41666
73	27409	27599	28169	29129	30488	32263	34477	37155	40328	44030
74	29154	29350	29939	30930	32335	34172	36466	39244	42544	46404
75	30900	31102	31710	32733	34184	36083	38457	41339	44767	48788
76	32645	32853	33480	34535	36034	37996	40452	43437	46997	51183
77	34390	34605	35251	36339	37884	39911	42449	45540	49232	53586
78	36136	36356	37022	38143	39736	41827	44449	47647	51474	55999
79	37881	38108	38793	39947	41588	43744	46451	49757	53721	58419
80	39626	39860	40565	41752	43442	45663	48455	51870	55973	60848
81	41372	41612	42336	43557	45296	47583	50462	53987	58230	63283
82	43117	43364	44108	45362	47150	49504	52470	56106	60491	65725
83	44862	45115	45879	47168	49005	51426	54479	58228	62756	68172
84	46608	46867	47651	48974	50861	53350	56490	60352	65024	70625
85	48353	48619	49423	50781	52717	55273	58503	62478	67295	73082
86	50098	50371	51195	52587	54574	57198	60516	64605	69569	75542
87	51844	52123	52968	54394	56431	59123	62530	66734	71844	78006
88	53589	53875	54740	56200	58288	61048	64545	68864	74121	80472
89	55334	55627	56512	58007	60145	62974	66560	70994	76399	82939
90	1,57080	1,57379	1,58284	1,59814	1,62003	1,64900	1,68575	1,73125	1,78677	1,85407

	θ								
	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
0	0,85515	0,86431	0,87342	0,88213	0,89005	0,89678	0,90193	0,90517	0,90628
	87614	88601	89585	90529	91390	92124	92687	93042	93163
	89729	90791	91853	92875	93811	94610	95226	95614	95747
	91860	93001	94146	95252	96267	97139	0,97810	0,98235	0,98381
	94008	95232	96465	0,97660	0,98762	0,99711	1,00444	1,00909	1,01068
	96171	97484	0,98811	1,00102	1,01297	1,02329	03129	03638	03812
	0,98352	0,99759	1,01185	02578	03872	04995	05868	06425	06616
	1,00550	1,02055	03587	05089	06491	07711	08665	09274	09483
	02765	04374	06018	07637	09155	10481	11521	12188	12418
	04998	06716	08479	10223	11865	13307	14442	15171	15423
	07248	09082	10971	12848	14624	16190	17430	18229	18505
	09517	11472	13494	15513	17433	19136	20488	21364	21667
	11803	13886	16050	18220	20295	22145	23623	24582	24916
	14108	16325	18638	20970	23212	25223	26837	27890	28257
	16432	18788	21254	23764	26186	28371	30135	31292	31696
	18773	21277	23916	26604	29219	31594	33524	34795	35240
	21134	23792	26606	29490	32314	34897	37008	38407	38899
	23513	26332	29332	32425	35473	38281	40594	42135	42679
	25910	28898	32094	35409	38699	41753	44288	45989	46591
	28326	31491	34893	38443	41994	45316	48098	49977	50645
	30760	34109	37728	41529	45360	48976	52031	54112	54855
	33212	36753	40600	44668	48800	52738	56096	58404	59232
	35683	39423	43510	47860	52317	56606	60303	62868	63794
	38171	42119	46457	51107	55913	60586	64661	67518	68557
	40677	44840	49441	54410	59591	64684	69181	72372	73542
	43200	47587	52463	57768	63352	68905	73877	77450	78771
	45739	50359	55522	61182	67198	73256	78759	82774	84273
	48296	53155	58618	64653	71132	77743	83844	88370	90079
	50867	55974	61750	68180	75155	82371	89146	1,94267	1,96226
	53455	58817	64918	71763	79269	87145	1,94682	2,00499	2,02759
	56056	61682	68120	75401	83473	92073	2,00470	07106	09732
	58672	64569	71356	79094	87768	1,97157	06529	14136	17212
	61302	67476	74625	82840	92154	2,02403	12878	21644	25280
	63943	70403	77924	86637	1,96630	07813	19538	29694	34040
	66597	73347	81253	90484	2,01193	13390	26527	38365	43625
	69261	76309	84609	94377	05840	19131	33866	47748	54209
	71935	79286	87991	1,98313	10568	25035	41569	57954	66031
	74618	82278	91395	2,02290	15371	31097	49648	69109	79422
	77309	85281	94821	06303	20244	37309	58105	81362	2,94870
	80006	88296	1,98264	10348	25178	43658	66935	2,94869	3,13130
	82710	91320	2,01723	14421	30166	50129	76116	3,09782	35467
	85418	94351	05194	18515	35198	56703	85612	26198	3,64253
	88129	1,97388	08674	22627	40265	63357	2,95366	44116	4,04813
	90843	2,00429	12161	26750	45354	70068	3,05304	63279	4,74135
	1,93558	2,03472	2,15652	2,30879	2,50455	2,76806	3,15339	3,83174	∞

φ	θ									
	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
1°	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,0174
2	03491	03491	03491	03491	03491	03491	03490	03490	03490	0349
3	05236	05236	05236	05236	05236	05236	05235	05235	05235	0523
4	06981	06981	06981	06981	06981	06980	06980	06979	06979	0697
5	08727	08727	08726	08726	08725	08725	08724	08723	08722	0872
6	10472	10472	10471	10471	10470	10469	10467	10466	10464	1046
7	12217	12217	12216	12215	12214	12212	12210	12207	12205	1220
8	13963	13962	13961	13960	13957	13955	13951	13948	13944	1394
9	15708	15707	15706	15704	15700	15696	15692	15687	15681	1567
10	17453	17453	17451	17447	17443	17438	17431	17427	17417	1740
11	19199	19198	19195	19191	19185	19178	19169	19160	19150	1914
12	20944	20943	20939	20934	20926	20917	20906	20894	20881	2086
13	22689	22688	22683	22676	22667	22655	22641	22626	22609	2259
14	24435	24433	24427	24419	24406	24392	24374	24355	24335	2431
15	26180	26178	26171	26160	26145	26127	26106	26083	26058	2603
16	27925	27923	27914	27901	27883	27861	27836	27807	27777	2774
17	29671	29667	29658	29642	29620	29594	29563	29529	29493	2945
18	31416	31412	31401	31382	31357	31325	31289	31248	31205	3116
19	33161	33157	33143	33121	33092	33055	33012	32965	32914	3286
20	34907	34901	34886	34860	34825	34783	34733	34678	34619	3455
21	36652	36646	36628	36598	36558	36509	36451	36387	36319	3624
22	38397	38390	38370	38336	38290	38233	38167	38094	38015	3793
23	40143	40135	40111	40073	40020	39955	39880	39796	39707	3961
24	41888	41879	41852	41809	41749	41676	41590	41496	41394	4128
25	43633	43623	43593	43544	43477	43394	43298	43191	43076	4295
26	45379	45367	45333	45278	45203	45110	45002	44882	44753	4462
27	47124	47111	47074	47012	46928	46824	46703	46569	46425	4627
28	48869	48855	48813	48745	48651	48536	48402	48252	48092	4792
29	50615	50599	50553	50477	50373	50245	50097	49931	49753	4956
30	52360	52343	52292	52208	52094	51953	51788	51605	51409	5120
31	54105	54086	54030	53938	53813	53657	53476	53275	53059	5283
32	55851	55830	55768	55667	55530	55360	55161	54940	54703	5445
33	57596	57573	57506	57396	57245	57059	56842	56600	56341	5607
34	59341	59317	59243	59123	58959	58756	58520	58256	57972	5767
35	61087	61060	60980	60850	60672	60451	60194	59907	59598	5927
36	62832	62803	62716	62575	62382	62143	61864	61552	61217	6086
37	64577	64546	64452	64300	64091	63832	63530	63193	62830	6245
38	66323	66289	66188	66023	65798	65519	65193	64828	64436	6402
39	68068	68031	67923	67746	67503	67203	66851	66459	66035	6559
40	69813	69774	69658	69467	69207	68884	68506	68084	67628	6715
41	71558	71517	71392	71188	70909	70562	70157	69703	69214	6870
42	73304	73259	73126	72907	72609	72238	71804	71318	70793	7024
43	75049	75001	74859	74626	74307	73910	73446	72927	72365	7177
44	76794	76744	76592	76343	76003	75580	75085	74530	73931	7330
45	0,78540	0,78486	0,78324	0,78059	0,77697	0,77247	0,76720	0,76128	0,75489	0,7481

φ	θ								
	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
1°	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2	03490	03490	03490	03490	03490	03490	03490	03490	03490
3	05235	05234	05234	05234	05234	05234	05234	05234	05234
4	06978	06978	06977	06977	06976	06976	06976	06976	06976
5	08720	08719	08718	08718	08717	08716	08716	08716	08716
6	10461	10459	10458	10456	10455	10454	10453	10453	10453
7	12199	12197	12195	12192	12190	12189	12188	12187	12187
8	13936	13932	13929	13925	13923	13920	13919	13918	13917
9	15670	15665	15660	15655	15651	15648	15645	15644	15643
10	17401	17394	17387	17381	17375	17371	17367	17365	17365
11	19130	19120	19110	19102	19095	19089	19084	19082	19081
12	20855	20842	20830	20819	20809	20801	20796	20792	20791
13	22576	22559	22544	22530	22518	22508	22501	22497	22495
14	24293	24272	24253	24236	24221	24209	24200	24194	24192
15	26006	25981	25957	25936	25917	25902	25891	25884	25882
16	27714	27684	27655	27629	27606	27588	27575	27567	27564
17	29418	29381	29347	29315	29288	29267	29250	29241	29237
18	31116	31073	31032	30995	30963	30937	30917	30906	30902
19	32809	32758	32710	32666	32629	32598	32575	32561	32557
20	34496	34437	34381	34330	34286	34250	34224	34207	34202
21	36178	36109	36044	35985	35934	35892	35862	35843	35837
22	37853	37773	37699	37631	37572	37525	37490	37468	37461
23	39521	39431	39345	39268	39201	39146	39106	39081	39073
24	41183	41080	40983	40895	40819	40757	40711	40683	40674
25	42838	42722	42612	42513	42426	42356	42304	42273	42262
26	44486	44355	44232	44120	44023	43944	43885	43849	43837
27	46126	45980	45842	45716	45607	45518	45453	45413	45399
28	47759	47595	47441	47301	47180	47081	47007	46962	46947
29	49383	49202	49031	48875	48740	48629	48548	48498	48481
30	51000	50799	50609	50437	50287	50165	50074	50019	50000
31	52608	52386	52177	51986	51821	51686	51586	51525	51504
32	54207	53964	53733	53524	53341	53193	53082	53015	52992
33	55798	55531	55278	55048	54848	54684	54563	54489	54464
34	57379	57087	56811	56559	56340	56161	56028	55947	55919
35	58952	58634	58332	58057	57818	57622	57477	57388	57358
36	60515	60169	59841	59541	59280	59067	58909	58811	58779
37	62068	61693	61337	61011	60727	60495	60323	60217	60182
38	63612	63206	62820	62467	62159	61907	61720	61605	61566
39	65146	64707	64290	63908	63574	63302	63099	62974	62932
40	66671	66197	65746	65334	64974	64679	64459	64324	64279
41	68185	67675	67189	66745	66356	66038	65801	65655	65606
42	69688	69140	68619	68140	67722	67379	67124	66966	66913
43	71182	70594	70034	69520	69070	68701	68426	68257	68200
44	72665	72036	71435	70884	70401	70005	69710	69527	69466
45	9,74137	0,73465	0,72822	0,72232	0,71715	0,71289	0,70972	0,70777	0,70711

φ	θ								
	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°
46°	0,80285	0,80228	0,80056	0,79775	0,79390	0,78911	0,78350	0,77721	0,77040
47	82030	81969	81787	81489	81081	80573	79977	79308	78584
48	83776	83711	83518	83202	82770	82231	81599	80890	80121
49	85521	85453	85249	84914	84457	83887	83217	82466	81651
50	87266	87194	86979	86626	86142	85539	84832	84036	83173
51	89012	88936	88709	88336	87826	87189	86442	85601	84689
52	90757	90677	90438	90045	89507	88836	88048	87161	86197
53	92502	92418	92166	91753	91187	90481	89650	88715	87698
54	94248	94159	93895	93450	92865	92122	91248	90264	89193
55	95993	95900	95622	95166	94541	93761	92843	91807	90680
56	97738	97641	97350	96872	96216	95397	94433	93345	92160
57	0,99484	0,99381	0,99077	0,98576	97889	97030	96019	94878	93634
58	1,01229	1,01122	1,00803	1,00279	0,99560	0,98661	97602	96405	95100
59	02974	02863	02529	01981	1,01229	1,00289	0,99180	97928	96560
60	04720	04603	04255	03683	02897	01915	1,00756	0,99445	98013
61	06465	06343	05980	05383	04563	03538	02327	1,00957	0,99460
62	08210	08084	07705	07083	06228	05158	03895	02465	1,00900
63	09956	09824	09430	08781	07891	06776	05459	03965	02334
64	11701	11564	11154	10479	09553	08392	07020	05465	03762
65	13446	13304	12878	12176	11213	10005	08577	06958	05183
66	15192	15043	14601	13873	12871	11616	10132	08447	06599
67	16937	16783	16324	15568	14529	13225	11683	09932	08009
68	18682	18523	18047	17263	16185	14832	13231	11412	09413
69	20428	20262	19769	18957	17839	16437	14776	12888	10812
70	22173	22002	21491	20650	19493	18040	16318	14360	12205
71	23918	23741	23213	22343	21145	19640	17857	15828	13594
72	25664	25481	24935	24034	22796	21239	19394	17293	14977
73	27409	27220	26656	25726	24446	22837	20928	18754	16356
74	29154	28959	28377	27417	26094	24432	22459	20211	17731
75	30900	30698	30097	29107	27742	26026	23989	21666	19101
76	32645	32437	31818	30796	29389	27619	25516	23117	20467
77	34390	34176	33538	32486	31035	29210	27041	24566	21830
78	36136	35915	35258	34174	32680	30800	28565	26012	23189
79	37881	37654	36978	35862	34325	32389	30086	27456	24544
80	39626	39393	38698	37550	35968	33976	31606	28897	25897
81	41372	41132	40417	39238	37611	35563	33124	30336	27246
82	43117	42871	42137	40925	39254	37148	34641	31773	28594
83	44862	44610	43856	42612	40896	38733	36157	33209	29939
84	46608	46349	45575	44299	42537	40317	37672	34643	31282
85	48353	48087	47294	45985	44178	41900	39186	36076	32623
86	50098	49826	49013	47671	45819	43483	40699	37508	33963
87	51844	51565	50732	49357	47459	45066	42211	38939	35302
88	53589	53304	52451	51043	49100	46648	43723	40369	36640
89	55334	55042	54170	52729	50740	48230	45235	41799	37977
90	1,57080	0,56781	0,55889	0,54415	1,52380	1,49811	1,46746	1,43229	1,39314

θ								
50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
0,75599	0,74881	0,74195	0,73564	0,73010	0,72554	0,72215	0,72005	0,71934
77050	76285	75553	74879	74287	73800	73436	73211	73135
78490	77676	76896	76177	75546	75025	74636	74396	74314
79920	79054	78225	77459	76786	76230	75815	75558	75471
81338	80419	79538	78724	78007	77414	76971	76697	76604
82746	81772	80836	79971	79208	78578	78106	77814	77715
84143	83111	82120	81203	80391	79720	79218	78907	78801
85529	84438	83388	82415	81554	80842	80307	79976	79864
86904	85752	84641	83610	82698	81941	81374	81021	80902
88269	87052	85879	84788	83822	83020	82417	82042	81915
89622	88340	87101	85949	84926	84076	83436	83039	82904
90965	89614	88308	87092	86011	85110	84432	84010	83867
92297	90876	89500	88217	87075	86122	85404	84957	84805
93619	92125	90677	89325	88119	87112	86352	85878	85717
94930	93362	91839	90415	89144	88080	87276	86773	86603
96231	94586	92986	91488	90148	89025	88175	87643	87462
97521	95797	94118	92543	91132	89948	89049	88486	88295
0,98802	96996	95236	93581	92096	90848	89898	89303	89101
1,00072	98183	96339	94602	93041	91725	90723	90094	89879
01333	0,99358	97427	95606	93965	92580	91523	90858	90631
02585	1,00522	98502	96593	94870	93412	92297	91595	91355
03827	01674	0,99562	97564	95756	94222	93047	92305	92050
05060	02815	1,00609	98518	96622	95010	93771	92987	92718
06284	03945	01643	0,99456	97469	95775	94470	93642	93358
07500	05064	02664	1,00379	98298	96519	95144	94270	93969
08707	06173	03672	01286	99108	97240	95793	94870	94552
09907	07272	04668	02178	0,99900	97940	96417	95442	95106
11098	08362	05651	03056	1,00674	98619	97016	95987	95630
12283	09442	06624	03919	01431	99278	97590	96503	96126
13460	10513	07586	04769	02172	0,99916	98141	96992	96593
14631	11577	08537	05607	02896	1,00534	98667	97453	97030
15795	12632	09478	06432	03605	01133	99170	97887	97437
16954	13680	10410	07245	04300	01714	0,99650	98293	97815
18107	14721	11333	08047	04981	02277	1,00107	98671	98163
19255	15755	12249	08839	05648	02823	00543	99023	98481
20399	16784	13156	09621	06304	03354	00958	99348	98769
21538	17807	14057	10395	06948	03870	01354	99646	99027
22673	18825	14952	11161	07582	04372	01731	0,99920	99255
23805	19839	15841	11920	08207	04863	02091	1,00168	99452
24934	20850	16726	12673	08825	05343	02436	00394	99619
26061	21857	17606	13421	09435	05813	02768	00598	99756
27186	22862	18484	14165	10041	06277	03089	00784	99863
28310	23865	19359	14906	10642	06735	03401	00954	99939
29432	24867	20233	15645	11241	07188	03708	01113	0,99985
1,30554	1,25868	1,21106	1,16383	1,11838	1,07641	1,04011	1,01266	1,00000

φ	θ									
	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
46°	0,80285	0,80343	0,80515	0,80801	0,81198	0,81701	0,82305	0,83001	0,83779	0,8462
47	82030	82092	82275	82578	82999	83535	84178	84920	85752	8665
48	83776	83841	84035	84356	84803	85371	86055	86846	87734	8870
49	85521	85590	85795	86135	86609	87211	87937	88779	89725	9075
50	87266	87339	87556	87915	88416	89054	89825	90719	91725	9282
51	89012	89088	89317	89697	90226	90901	91716	92665	93735	9491
52	90757	90838	91078	91479	92037	92750	93613	94618	95755	9700
53	92502	92587	92841	93262	93850	94603	95514	96578	97784	0,9911
54	94248	94337	94603	95047	95666	96458	97420	0,98545	0,99822	1,0123
55	95993	96086	96366	96832	97483	0,98317	0,99331	1,00519	1,01871	0337
56	97738	97836	98130	0,98618	0,99302	1,00179	1,01247	02499	03928	0551
57	0,99484	0,99586	0,99894	1,00406	1,01123	02044	03167	04487	05996	0768
58	1,01229	1,01336	1,01658	02194	02946	03912	05092	06481	08073	0985
59	02974	03086	03423	03984	04770	05783	07021	08482	10159	1204
60	04720	04837	05188	05774	06597	07657	08955	10490	12256	1424
61	06465	06587	06954	07566	08425	09534	10894	12504	14361	1645
62	08210	08338	08720	09358	10255	11414	12837	14525	16476	1868
63	09956	10088	10486	11151	12087	13296	14784	16552	18601	2092
64	11701	11839	12253	12945	13920	15182	16735	18586	20735	2318
65	13446	13590	14020	14740	15755	17070	18691	20626	22877	2544
66	15192	15340	15787	16536	17592	18961	20651	22672	25029	2772
67	16937	17091	17555	18333	19430	20854	22615	24724	27190	3002
68	18682	18842	19324	20130	21269	22750	24583	26782	29359	3232
69	20428	20593	21092	21928	23110	24648	26555	28846	31537	3464
70	22173	22345	22861	23727	24953	26548	28530	30915	33723	3697
71	23918	24096	24630	25527	26796	28451	30509	32990	35917	3931
72	25664	25847	26400	27328	28641	30356	32491	35070	38118	4166
73	27409	27599	28169	29129	30488	32263	34477	37155	40328	4403
74	29154	29350	29939	30930	32335	34172	36466	39244	42544	4640
75	30900	31102	31710	32733	34184	36083	38457	41339	44767	4878
76	32645	32853	33480	34535	36034	37996	40452	43437	46997	5118
77	34390	34605	35251	36339	37884	39911	42449	45540	49232	5358
78	36136	36356	37022	38143	39736	41827	44449	47647	51474	5599
79	37881	38108	38793	39947	41588	43744	46451	49757	53721	5841
80	39626	39860	40565	41752	43442	45663	48455	51870	55973	6084
81	41372	41612	42336	43557	45296	47583	50462	53987	58230	6328
82	43117	43364	44108	45362	47150	49504	52470	56106	60491	6572
83	44862	45115	45879	47168	49005	51426	54479	58228	62756	6817
84	46608	46867	47651	48974	50861	53350	56490	60352	65024	7062
85	48353	48619	49423	50781	52717	55273	58503	62478	67295	7308
86	50098	50371	51195	52587	54574	57198	60516	64605	69569	7554
87	51844	52123	52968	54394	56431	59123	62530	66734	71844	7800
88	53589	53875	54740	56200	58288	61048	64545	68864	74121	8047
89	55334	55627	56512	58007	60145	62974	66560	70994	76399	8293
90	1,57080	1,57379	1,58284	1,59814	1,62003	1,64900	1,68575	1,73125	1,78677	1,8540

θ								
50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
0,85515	0,86431	0,87342	0,88213	0,89005	0,89678	0,90193	0,90517	0,90628
87614	88601	89585	90529	91390	92124	92687	93042	93163
89729	90791	91853	92875	93811	94610	95226	95614	95747
91860	93001	94146	95252	96267	97139	0,97810	0,98235	0,98381
94008	95232	96465	0,97660	0,98762	0,99711	1,00444	1,00909	1,01068
96171	97484	0,98811	1,00102	1,01297	1,02329	03129	03638	03812
0,98352	0,99759	1,01185	02578	03872	04995	05868	06425	06616
1,00550	1,02055	03587	05089	06491	07711	08665	09274	09483
02765	04374	06018	07637	09155	10481	11521	12188	12418
04998	06716	08479	10223	11865	13307	14442	15171	15423
07248	09082	10971	12848	14624	16190	17430	18229	18505
09517	11472	13494	15513	17433	19136	20488	21364	21667
11803	13886	16050	18220	20295	22145	23623	24582	24916
14108	16325	18638	20970	23212	25223	26837	27890	28257
16432	18788	21254	23764	26186	28371	30135	31292	31696
18773	21277	23916	26604	29219	31594	33524	34795	35240
21134	23792	26606	29490	32314	34897	37008	38407	38899
23513	26332	29332	32425	35473	38281	40594	42135	42679
25910	28898	32094	35409	38699	41753	44288	45989	46591
28326	31491	34893	38443	41994	45316	48098	49977	50645
30760	34109	37728	41529	45360	48976	52031	54112	54855
33212	36753	40600	44668	48800	52738	56096	58404	59232
35683	39423	43510	47860	52317	56606	60303	62868	63794
38171	42119	46457	51107	55913	60586	64661	67518	68557
40677	44840	49441	54410	59591	64684	69181	72372	73542
43200	47587	52463	57768	63352	68905	73877	77450	78771
45739	50359	55522	61182	67198	73256	78759	82774	84273
48296	53155	58618	64653	71132	77743	83844	88370	90079
50867	55974	61750	68180	75155	82371	89146	1,94267	1,96226
53455	58817	64918	71763	79269	87145	1,94682	2,00499	2,02759
56056	61682	68120	75401	83473	92073	2,00470	07106	09732
58672	64569	71356	79094	87768	1,97157	06529	14136	17212
61302	67476	74625	82840	92154	2,02403	12878	21644	25280
63943	70403	77924	86637	1,96630	07813	19538	29694	34040
66597	73347	81253	90484	2,01193	13390	26527	38365	43625
69261	76309	84609	94377	05840	19131	33866	47748	54209
71935	79286	87991	1,98313	10568	25035	41569	57954	66031
74618	82278	91395	2,02290	15371	31097	49648	69109	79422
77309	85281	94821	06303	20244	37309	58105	81362	2,94870
80006	88296	1,98264	10348	25178	43658	66935	2,94869	3,13130
82710	91320	2,01723	14421	30166	50129	76116	3,09782	35467
85418	94351	05194	18515	35198	56703	85612	26198	3,64253
88129	1,97388	08674	22627	40265	63357	2,95366	44116	4,04813
90843	2,00429	12161	26750	45354	70068	3,05304	63279	4,74135
1,93558	2,03472	2,15652	2,30879	2,50455	2,76806	3,15339	3,83174	∞

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
24762 Quai des Grands-Augustins, 55.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS.

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

APPELL (**Paul**), Membre de l'Institut, Professeur à l'Université de Paris, et **LACOUR** (**Émile**), Maître de Conférences à l'Université de Nancy. — **Principes de la Théorie des Fonctions elliptiques.** Grand in-8 avec figures; 1896. ..... 12 fr.

APPELL (**Paul**), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences, et **GOURSAT** (**Édouard**), Maître de Conférences à l'École Normale supérieure. — **Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales.** *Étude des fonctions analytiques sur une surface de Riemann.* Avec une Préface de M. HERMITE. Un beau volume grand in-8, avec 91 figures; 1895. ..... 16 fr.

DARBOUX (**Gaston**), Membre de l'Institut, Doyen de la Faculté des Sciences et Professeur de Géométrie supérieure à l'Université de Paris. — **Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes.** Deux volumes grand in-8, se vendant séparément.

Tome I. Volume de VI-538 pages avec figures; 1898 ..... 10 fr.
Tome II ..... (*En préparation.*)

HALPHEN (**G.-H.**), Membre de l'Institut. — **Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications.** 3 volumes grand in-8, se vendant séparément.

Ire Partie : *Théorie des fonctions elliptiques et de leur développement en série*; 1886. ..... 15 fr.

IIe Partie : *Applications à la Mécanique, à la Physique, à la Géodésie, à la Géométrie et au Calcul intégral*; 1888. ..... 20 fr.

IIIe Partie : *Fragments.* (*Quelques applications à l'Algèbre et en particulier à l'équation du 5e degré. Quelques applications à la théorie des nombres. Questions diverses.*) Publié par les soins de la Section de Géométrie de l'Académie des Sciences; 1891 ..... 8 fr. 50 c.

PICARD (**Émile**), membre de l'Institut, Professeur à l'Université de Paris, et **SIMART** (**Georges**), Capitaine de frégate, Répétiteur à l'École Polytechnique. — **Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes.** 2 volumes grand in-8, se vendant séparément.

Tome I : Volume de VI-246 pages; 1897 ..... 9 fr.
Tome II. (*En préparation.*)

TANNERY (**Jules**), Sous-Directeur des Études scientifiques à l'École Normale supérieure, et **MOLK** (**Jules**), Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy. — **Éléments de la théorie des fonctions elliptiques.** 4 volumes grand in-8, avec figures.

Tome I : *Introduction. Calcul différentiel* (Ire Partie); 1893. 7 fr. 50 c.
Tome II : *Calcul différentiel* (IIe Partie); 1896 ..... 9 fr.
Tome III : *Calcul intégral* (paraîtra en 1898) ..... (*Sous presse.*)
Tome IV : *Applications* ..... (*En préparation.*)

(1762) PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.